GEOMETRIÆ CAVALERII

LIBER SECVNDVS.

In quo de Triangulo præcipuè, & Parallelogrammo, ac Solidis ab eiſdem genitis plura demonſtrantur, necnon aliæ quædam Propoſitiones lemmaticæ pro ſequentibus Libris oſtenduntur.

DIFINITIONES.

I.

SI per oppoſitas tangentes cuiuſcunq; datæ planæ figuræ ducantur duo plana inuicem parallela, recta, ſiue inclinata ad planum datæ figuræ, hinc inde indefinitè producta; quorum alterum moueatur verſus reliquum eidem ſemper æquidiſtans donec illi congruerit: ſingulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu fiunt communes ſectiones plani moti, & datæ figuræ, ſimul collectæ vocentur: Omnes lineæ talis figuræ, ſumptæ regula vna earundem; & hoc cum plana ſunt recta ad datam figuram: Cum verò ad illam ſunt inclinata vocentur. Omnes lineę eiuſdem obliqui tranſitus datæ figuræ, regula pariter earundem vna; liceat tamen, cum expediet, etiam prædictas vocare, recti tranſitus, ſicuti has, obliqui tanſitus, eius nempè, qui fit in tali ęquidiſtãtium planorum ad datam figuram inclinatione.

Post Secund. lib. 1.

E. Defin. Sec. lib. 1.

COROLLARIVM.

Corol. 1. lib. 1. *Hinc patet, quoniam oppositæ tangentes regula quacunque in data figura duci possunt, etiam omnes lineas datæ figuræ regula quacunq; recta linea proposita haberi posse, tum recti, tum etiam eiusdem obliqui transitus.*

II.

Corol. 1. lib. 1. SI, proposito quocunq; solido, eiusdem opposita plana tangentia regula quacunque ducta fuerint, hinc inde indefinitè producta, quorum alterum versus reliquum moueatur Post Secund. lib. semper eidem æquidistans, donec illi congruerit; singula plana, quę in toto motu concipiuntur in proposito solido, simul E. Defin. Sec. lib. collecta, vocentur: Omnia plana propositi solidi, sumpta, regula eorundem vno.

COROLLARIVM.

Hinc etiam discimus, veluti propositi solidi opposita tangentia plana quacunque regula duci possunt, ita eiusdem omnia plana regula quocunq; plano haberi posse.

III.

Corol. 1. lib. 1. SI oppositis tangentibus planis occurrant interius duæ rectę lineę, vna perpendiculariter, reliqua obliquè; puncta, quę sunt communes sectiones propositæ lineæ perpendiculariter incidentis, & singulorum planorum, quæ collecta dicuntur, omnia plana (ita tamen producta, vt easdem secare possint) siue puncta, quę sunt communes sectiones eiusdem, & moti plani, fiuntq; in toto motu, simul collecta vocentur: Omnia puncta recti transitus propositæ lineæ perpendiculariter incidentis; quę in obliquè incidente vocentur, eiusdem obliqui transitus.

COROLLARIVM.

Ex hoc habetur singula puncta recti transitus, vel obliqui, incidentis lineæ, nedum esse communes sectiones illius, & singulorum, quæ collecta dicuntur, omnia plana propositi solidi, sed etiam, si per talem incidentem extendatur planum, esse communes sectiones illius, & singularum, quæ collectæ dicuntur: Omnes lineæ planæ figuræ, cuius oppositæ tangentes sunt communes sectiones plani eiusdem figuræ, & oppositarum tangentium dicti solidi: nam motum planum designat in plano secante rectam lineam, & insimul punctum in incidente, quod reperitur in illa recta linea, & ideò idem punctum est communis sectio tum moti plani, & rectæ incidentis, tum vnius earum, quæ dicuntur omnes lineæ datæ figuræ planæ (ita tamen productæ, vt hanc incidentem secare possint) & eiusdem incidentis.

IV.

SI inter alterum extremorum punctorum propositæ rectæ lineæ, & singula puncta, quæ simul collecta dicuntur omnia puncta recti, vel eiusdem obliqui transitus eiusdem, sumamus interiacentes lineas, dicantur istæ simul collectæ: Omnes abscissæ propositæ lineæ, quas (etiam si non exprimatur) vocari supponemus recti transitus, si puncta sint recti transitus, vel eiusdem obliqui transitus, si puncta sint eiusdem obliqui transitus.

V.

REctæ lineæ verò in antecedentis definitionis propositæ linea inter eadem puncta, & reliquum extremorum interiacentes, dicentur: Residuæ omnium abscissarum propositæ lineæ recti transitus, si puncta sint recti transitus, vel eiusdem obliqui transitus, si sumpta puncta sint eiusdem obliqui transitus.

COROLLARIVM.

Hinc liquet cuilibet abſciſſæ in proximis diffinitionibus propoſitæ lineæ reſpondere vnam ex reſiduis, ita vt tot ſint illæ, quæ dicuntur reſiduæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ, quot illæ, quæ dicuntur eiuſdem omnes abſciſſæ, ſiue recti, ſiue eiuſdem obliqui tranſitus, nam reſiduæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ interiacent inter reliquum extremum eiuſdem punctum, & eadem illa puncta, inter quæ, & extremum primò dictum, interiacent omnes abſciſſæ.

V I.

SI pro qualibet earum, quæ dicuntur omnes abſciſſæ propoſitæ rectæ lineæ, ipſa propoſita linea, ſiue eidem æqualis, ſemel aſſumpta intelligatur, iſtæ ſimul collectæ dicentur: Maximæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ, vel ſubintelligentur ſemper eſſe omnium, etiam ſi dicerentur ſolummodò: Maximæ abſciſſarum.

COROLLARIVM.

Et quia omnes abſciſſæ tot ſunt, quot omnes reſiduæ, maximè verò omnium abſciſſarum tot ſunt, quot omnes abſciſſæ, nam cuilibet abſciſſæ reſpondet vna maximarum, ideò maximæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ tot erunt, quot etiam reſiduæ omnium abſciſſarum, quotcumque ſint omnes abſciſſæ, vel reſiduæ: ideſt pro qualibet reſidua habebimus quoque vnam maximarum; ijs ſemper recti, vel eiuſdem obliqui tranſitus aſſumptis.

V I I.

SI cuilibet omnium abſciſſarum propoſitæ rectæ lineæ adiuncta intelligatur alia recta linea cuidam ęqualis, compoſitæ ex omnibus abſciſſis, & adiunctis, ſimul collectæ dicentur: Omnes abſciſſæ propoſitæ lineæ adiuncta tali, nempè adiuncta illa, cui, quę adiunguntur, ſunt ęquales. Si verò fieret hęc adiunctio reſiduis, vel maximis omnium abſciſſarum, pariter dicerentur: Reſiduæ, vel Maximæ omnium abſciſſarum adiuncta eadem; recti ſemper, vel eiuſdem obliqui tranſitus.

Pro-

A. V I I I.

A.

PRopoſita quacunque plana figura, & in ea ducta vtcunque recta linea vſque ad ambitum hinc inde terminata, ſi ipſa recta linea deſcribere quamcumque figuram planam intelligatur, non exiſtentem in plano propoſitę figurę, ac deinde reliquæ earum, quæ dicuntur omnes lineæ propoſitæ figuræ, ſumptę regula iam ducta linea (& recti tranſitus ſi deſcripta figura ſit erecta plano propoſitę, vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi illi ſit inclinata, eius nempè tranſitus, qui ſit in tali inclinatione) deſcribere intelligantur figuras planas ſimiles, ac ſimiliter poſitas, & æquidiſtantes primò deſcriptę, ita vt omnes deſcribentes ſint deſcriptarum figurarum lineę, vel latera homologa; omnes deſcriptæ figuræ ſimul ſumptæ dicentur. Omnes figuræ planæ ſimiles talis propoſitæ figurę, ſumptæ regula earum vna, vel regula etiam ipſa linea, vel latere deſcribente; vt ſi deſcriptæ figuræ eſſent quadrata, hæ dicerentur. Omnia quadrata talis propoſitæ figurę, vel ſi eſſent triangula ęquilatera dicerentur. Omnia triangula ęquilatera eiuſdem.

B.

B.

Solidum, cuius omnes deſcriptæ figuræ ſimiles ſunt omnia plana, dicetur: Solidum ſimilare genitum ex propoſita figura iuxta eandem regulam, iuxta quam ſumptæ omnes dictæ figuræ ſimiles fuerunt, quæ igitur ex figuris propoſitis, vt ſic generantur, dicentur abſque alio addito: Solida ſimilaria genita ex propoſitis figuris iuxta regulas omnium ſimilium figurarum, quæ ipſorum euadunt omnia plana, propoſitæ autem figuræ, eorundem genitrices figuræ vocabuntur.

C.

C.

Cum verò duarum genitricium vtcunq; figurarum omnes deſcriptæ figuræ nedum ſimiles erunt, quę reperientur in earum vnaquaque, ſed etiam quæ ſunt vnius, inuenientur ſimiles omnibus figuris ſimilibus alterius propoſitæ figuræ, fuerint autem in vtroque ſolido figuræ æquè eleuatæ ſuper plana genitricium figurarum, tunc ſolida genita ex propoſitis figuris

guris

guris iuxta regulas eas, quę ſunt regulę omnium ſimilium figurarum earundem propoſitarum genitricium figurarum, dicentur ſolida inter ſe, vel ad inuicem ſimilaria, genita ex dictis figuris iuxta dictas regulas, vel intelligentur ſemper eſſe inter ſe, ſeu ad inuicem ſimilaria, licet hoc non exprimatur, quotieſcunq; contrarium aliquid non adijciatur.

D.

D.

Cum autem duas figuras in eodem plano habuerimus in eadem altitudine exiſtentes, rectangula ſub ſingulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ vnius propoſitarum figurarum, & illis in directum reſpondentibus in alia figura ſimul ſumpta ſic vocabimus, nempè Rectangula ſub eiſdem figuris, regula eadem, quæ eſt omnium ſumptarum linearum regula.

E.

E.

Cum verò propoſitarum figurarum altera fuerit parallelogrammum, cuius baſis, iuxta quam altitudo ſumitur, ſit ſumpta pro regula, dicta rectangula vocabuntur etiam: Omnia rectangula reliquæ figuræ æquè alta ac eorum vnum.

APPENDIX.

Pro antecedentium Definitionum explicatione.

Sit figura plana quæcunque, A B C, duæ eiuſdem oppoſitæ tangentes vtcunque ductæ, E O, B C, intelligantur autem per, E O, B C, indefinitè extenſa duæ plana inuicem parallela, quorum quod tranſit per, E O, ex. gr. moueatur verſus planum per, B C, ſemper illi æquidiſtans, donec illi congruat, igitur communes ſectiones talis moti, ſiue fluentis plani, & figuræ, A B C, quæ in toto motu ſiunt, ſimul collectæ à me vocantur: Omnes lineæ figuræ, A B C, quarum aliquæ ſint ipſæ, L H, P F, B C, ſumptæ regula earum vna, vt, B C, recti tranſitus, cum plana parallela rectè ſecant figuram, A B C, eiuſdem obliqui tranſitus, cum illam obliquè ſecant, eius ſcilicet tranſitus, qui in tali inclinatione fit.

Coroll. 1. lib. 1.

Defin. 1. huius.

Intelligamus nunc, A B C, eſſe ſolidum, cuius duo oppoſita plana tangentia ſint, quæ tranſeunt per, E O, B C, moueatur autem adhuc planum, per, E O, extenſum, verſus planum per, B C, ſemper

per

per illi æquidiſtans, igitur huius plani moti, ſiue fluentis conceptæ in ſolido, A B C, figuræ, quæ in toto motu fieri intelliguntur, voco: Omnia plana ſolidi, A B C, ſumpta regula eorum vno, quarum aliqua repræſentare poſſunt plana, L H, P F, B C. D. fin. 2. huius.

Vlterius duæ rectæ lineæ, O N, E M, occurrant planis per, E O, B C, tranſeuntibus iam dictis in punctis, O, N; E M, quarum, O N, perpendiculariter, E M, verò obliquè illis incidat, puncta igitur, quæ ſunt communes ſectiones omnium planorum ſolidi, A B C, productorum, ſi opus ſit, & rectæ, O N, vocantur ipſius omnia puncta recti tranſitus, quarum aliqua ſunt puncta, H, I, N, quæ inter ipſa, & extremum punctum, O, continentur, vt ipſæ, O H, O I, O N, dicuntur abſciſſæ, quæ inter eadem puncta, & aliud extremum, quod eſt, N, continentur, vt ipſæ, N I, N H, N O, reſiduæ omnium abſciſſarum; tot æquales ipſi, O N, quot ſunt omnes abſciſſæ, ſiue reſiduæ omnium abſciſſarum, O N, dicuntur maximæ abſciſſarum, ſiue omnium abſciſſarum, O N, quibus ſi adiungatur aliqua recta linea, dicuntur abſciſſæ, reſiduæ, ſiue maximæ adiuncta tali linea, omnes quidem recti tranſitus in recta, O N, in, E M, verò dicuntur eiuſdem obliqui tranſitus, eius nempè, qui in tali inclinatione fit.

Defin. 3. huius.

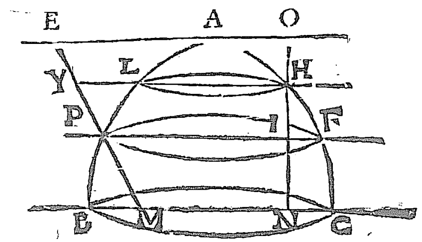
Def. 4. huius.

Def. 5. huius.

Defin. 6. huius.

Defin. 7. huius.

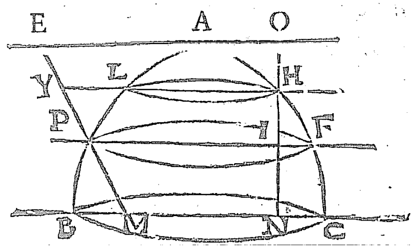
Dicitur autem in Coroll. Defin. 3. eadem puncta recti tranſitus, ſiue obliqui, fieri tum ab omnibus planis propoſiti ſolidi, vt, A B C, tum ab omnibus lineis plani per eaſdem incidentes extenſi, vt ex. gr. plani, quod tranſit per, E O, B C, quod quidem etiam tranſeat per ipſas, O N, E M, idem enim planum, quod in ſolidum, A B C, producit figuram, L H, in figura plana, A B C, producit rectam, L H, & in recta, O N, punctum, H, in, E M, verò punctum, Y, quod tranſit, H L, producta, & ideò dico puncta, H, Y, poſſe dici etiam effecta à recta, Y, H, & ſic omnia puncta recti tranſitus quę nempè ſunt in, O N, nedum fieri à dictis planis parallelis, ſed etiam à lineis parallelis figura,



O gura,

guræ, A B C, productis si opus sit, idem intellige in recta, E M, cuius omnia puncta dicuntur eiusdem obliqui transitus, eius nempè, qui in tali inclinatione fit.

Pro intelligentia Defin. 8. supponatur in figura plana proposita, A B C, vtcunque recta, B C, quæ describat figuram planam, B C, eleuatam super, ABC, singulæ autem lineæ, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, A B C, sumptæ regula, B C, recti transitus, si figura, B C, sit erecta figuræ, ABC, vel eiusdem obliqui transitus (qui nempè in inclinatione descriptæ figuræ ad planum, A B C, sit, si figura, B C, sit inclinata ad figuram, A B C,) describere intelligantur figuras planas similes similiter positas,



D. Defin. 10. lib. 1. & æquidistantes ipsi figuræ, B C, ita vt describentes sint descriptarum figurarum lineæ, vel latera homologa, quarum figurarum aliquæ sint ipsæ, B C, P F, L H, istæ igitur omnes simul sumptæ vocantur,

A. Def. 8. huius. omnes figuræ similes ipsius figuræ, A B C, sumptæ regula figura, B C, vel linea, aut latere, B C.

Solidum, cuius omnes dictæ figuræ similes ipsius, A B C, sunt omnia plana, dicitur, solidum similare genitum ex figura plana, A

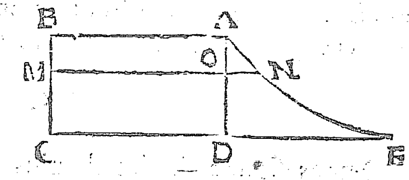
B. Def. 8. huius. B C, iuxta regulam ipsam figuram, vel lineam, B C, & ipsa figura, A B C, appellatur genitrix eiusdem solidi, quod esse intelligatur ipsum, A B C.

Si verò adsit alia figura plana, cuius omnes lineæ, quædam regula sumptæ, describant similes figuras planas, & similiter positas,

C. Def. 8. huius. omnes vni cuidam æquidistantes, & similes figuræ, B C, & æquè eleuatas super plana genitricium figurarum, solida similaria genita ex istis figuris, iuxta dictas regulas vocabuntur vlterius inter se, vel ad inuicem similaria, licet cum dicemus, solida similaria genita ex talibus, & talibus figuris, & hoc etiam sine alio addito, intelligemus semper ea esse inter se, vel ad inuicem similaria, etiam si non exprimatur, hoc autem nisi aliter explicetur.

Pro declarandis D. & E. Defin. 8. exponantur duæ figuræ in eodem

dem plano, & in eadem altitudine, quæ sint, B C D A, A D E, sit autem altitudo figuræ, A B C D, sumpta respectu ipsius rectæ, C D, & altitudo figuræ, A D E, respectu ipsius, D E, quæ intelligantur abscindere ex eadem parte à communi altitudine partes æquales, quæ sibi in directum erunt, sint verò ambæ communis regula omnium linearum dictarum figurarum, & sit ducta alia vtcumq; eidem, C E, parallela, M N, cuius portio manens in figura, B D, sit, M O, & manens in figura, A D C, sit, O N; rectangula igitur, C D E, M O N, & reliqua rectangula, quæ sub qualibet



Definit. 1. huius.

earum, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, B D, (regula, C E, vel, C D,) & illi in directum posita in figura, A D E, continentur (erit autem semper aliqua eidem in directum, præterquam fortè illi, quæ tangit figuram, vt, B A, potest .n. in figura, A D E, illi vice lineæ vnum punctum tantum respondere, vt, A, hoc tamen rectangulum non computatur, quia nihil illis adiungit, erit inquam hæc linearum respondentia in figura, A D E, eis, quæ sumuntur in, B D, nam sunt in eadem altitudine sumpta aspectu earundem linearum, sub quibus rectangula continentur) simul sumpta vocamus: Rectangula sub figuris, B C D A, A D E. D. Def. 8. huius.

Si verò contingeret alteram earundem figurarum esse parallelogrammum, & regulam omnium eiusdem linearum esse vnum eiusdem laterum, vt, C D, respectu cuius sumitur altitudo, tunc quia illæ, quæ æquidistant ipsi, C D, in parallelogrammo, B D, sunt eidem, C D, æquales, & sunt latera dictorum rectangulorum, ideò dico, nos ea vocare posse nedum rectangula sub his figuris, sed etiam sic appellare, nempè. Omnia rectangula figuræ A D E, (quæ non est necessariò parallelogrammum) æquè alta, ac vnum eorum .i. ac rectangulum, C D E, altitudinis scilicet æqualis ipsi, C D, prout libuerit autem nominentur.

POSTVLATA.

I.

Def. 1. & 2. huius.

Congruentium planarum figurarum omnes lineæ, sumptæ vna earundem vt regula communi, sunt congruentes; Et congruentium solidorum omnia plana, sumpta eorum vno, vt regula communi, sunt pariter congruentia.

II.

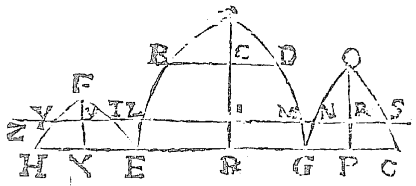
A. Def. 8. huius.

Omnes figuræ similes alicuius figuræ planæ sunt omnia plana solidi, quod terminatur superficie, in qua iacent perimetri omnium dictarum similium figurarum.

THEOREMA I. PROPOS. I.

Quarumlibet planarum figurarum omnes lineæ recti transitus; & quarumlibet solidarum omnia plana, sunt magnitudines inter se rationem habentes.

Sint duæ planæ vtcumque figuræ, E A G, G O Q, quarum regulæ, E G, G Q, vtcumq; sit autem figuræ, E A G, altitudo sumpta respectu, E G, ipsa, A ℞, & figuræ, G O Q, altitudo sumpta respectu, G Q, ipsa, O P. Dico ergo omnes lineas recti transitus figuræ, E A G, sumptas cum regula, E G, ad omnes lineas recti transitus figuræ, G O Q, sumptas cum regula, G Q, rationem habere. Constituantur regulæ, E G, G Q, sibi in directum, & sint totæ figuræ supra ipsas regulas in eodem plano, vel igitur altitudines, A ℞, O P,

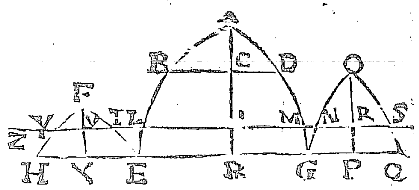


sunt æquales, vel non, supponamus primò ipsas esse equales, abscindantur nunc ab altitudinibus, A ℞, O P, ex hypotesi equalibus, portiones, I ℞, R P, æquales versus regulas, E G, G Q, si ergo per punctum, I, duxerimus regulæ, E G, parallelam, L M, hæc producta transibit per punctum, R, fiet ergo, L M, quę clauditur perimetro figuræ, E A G, vna ex ijs, quæ dicuntur omnes lineæ figurę, E A G, &, N S, clausa perimetro figuræ, G O S, vna ex omnibus lineis figurę, G O Q, sumptis omnibus lineis iam dictis, regula communi, E Q, & recti transitus, vti semper intelligemus, nisi aliter explicetur, etiamsi id non exprimatur. Quoniam igitur si recta, N S, sit minor recta, L M, potest indefinitè producta aliquando fieri maior, si hoc intelligamus fieri de cæteris lineis, quæ ab altitudinibus portiones abscindunt equales versus regulas, E G, G Q, patet, quod singulę, quę erunt in figura, G O Q, productę fient maiores ijs, quę erunt in figura, E A G, sit autem ita facta productio cuiuslibet omnium linearum figuræ, G O Q, regula, E Q, vt quæ illi in directum constituitur in figura, E A G, sit portio eiusdem productæ, vt ex. gr. ita sit producta, S N, versus, M L, vt ipsam pertranseat perueniens verbi gratia vsque ad, T, ita vt, L M, sit portio ipsius, T S, patet ergo, quod omnes lineæ figuræ, E A G, erunt pars omnium linearum figuræ, G O Q, sic productarum, & istę erunt totum, nam illę istis claudentur, siue in his totæ reperientur, & aliquid amplius .s. quod de omnibus lineis figuræ, G O Q, sic productis manet extra figuram, E A G, totum autem est maius sua parte, ergo omnes lineę figuræ, G O Q, sic productę fuerunt, vt maiores effectę fuerint omnibus lineis figuræ, E A G; eadem methodo omnes lineas figurę, E A G, sic producemus, vt complectantur omnes lineas figuræ, G O Q, iam productas, vt dictum est, & ideò maiores eisdem fiant, magnitudines autem rationem habere inter se dicuntur, quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt, ergo patet omnes lineas figurarum, E A G, G O Q, cum altitudines, A ℞, O P, fuerint æquales, inter se rationem habere. Diffin. 4. l. 5. Elem.

Non sint autem æquales, sed altitudo, A ℞, sit maior altitudine, O P, & ab, A ℞, sit abscissa versus, E G, ipsa, C ℞, equalis ipsi, O P, & per, C, ducta, B D, parallela, E G, intelligatur per, B D, à figura, E A G, abscissa figura, B A D, & ea constituta, vt, H F E, ita vt sit in eodem plano ad eandem partem cum figuris, E B D G, (quæ remansit) &, G O Q, existente, H E, in directum ipsi, E Q, quod si adhuc altitudo, F X, sit maior altitudine, O P, abscindatur illi æqualis, & sic semper fiat, & disponantur figuræ residuæ, vt earum bases sint in directum ipsi, E Q, & figuræ constitutæ in eodem plano, & ad eandem partem cum figuris, E A G, G O Q, in altitudinibus vel equalibus, vel non maioribus altitudine, O P. Intelligatur nunc ducta vtcumque in figura, G O Q, recta, N S, parallela, G Q, quæ erit vna ex omnibus lineis figura, G O Q, regula, G Q, producaturq; ita, vt pertranseat omnes sic dispositas figuras, vt vsq; in, Z, complectetur ergo, S Z, ipsas, L M, Y T, & sic quæuis omnium

nium linearum figurę, G O Q, hac lege producta, complectetur eas, quæ de ipsa manent in figuris iam dispositis, ergo omnes lineæ figuræ, G O Q, sic productæ complectentur omnes lineas figurarum sic dispositarum, ergo erunt ad illas simul sumptas, vt totum ad partem, nam illæ in his reperientur, & aliquid amplius, ergo erunt illis maiores, omnes lineę autem figurarum sic dispositarum sunt non minores omnibus lineis figuræ, E A G, ex qua desumptæ sunt, ergo omnes lineę figurę, G O Q, sic productæ sunt, vt effectæ fuerint maiores omnibus lineis figurę, E A G; eodem pacto ostendemus nos posse vice versa istas illis efficere maiores, ergo omnes lineæ figurarum, E A G, G O Q, sumptæ cum regulis vtcumque suppositis, cuiuscuis sint altitudinis sumptę iuxta easdem regulas, sunt magnitudines inter se rationem habentes, quod si subter rectam, H Q, adhuc essent portiones considerata[rum] à nobis figurarum, E A G, G O Q, eodem modo ostenderemus omnes lineas earundem sumptas, cum ijsdem regulis esse magnitudines rationem inter se habentes, vnde integrarum figurarum omnes lineę essent magnitudines inter se rationem habentes, quod in fig. planis ostendere opus erat.

Diffin. 4. l. 5. Elem.



In figuris autem solidis consimiliter procedemus; nam si in superiori figura intellexerimus, E A G, G O Q, esse figuras solidas, & pro rectis lineis æquidistantibus intellexerimus plana æquidistantia, vt pro rectis, E G, G Q, plana, E G, G Q, quibus plana, L M, N S, sint æquidistanter ducta, sumptis pro regulis planis, E G, G Q, ijsque in directum sibi constitutis, ita vt iaceant regulæ in eodem plano, ostendemus nos posse ita producere omnia plana solidæ figuræ, G O Q, vt eadem complectantur omnia plana figuræ, E A G, (si sint eiusdem altitudinis dictæ figuræ) integræ existentis, vel (si non sint) diuisæ in figuras solidas, ex. gr. E B D G, B A D, sic dispositas, vt bases, siue regulę iaceant in eodem plano, & ita, vt omnia plana dictarum figurarum solidarum, vel sint intra opposita plana dictas figuras tangentia, vel nihil eorum extra, vnde omnia plana figuræ solidæ, G O Q, sic producta fient totum, & portiones ab eisdem captæ in figura solida, E A G, integra, vel diuisa, vt dictum est, omnia plana figuræ, E A G, fient pars omnium planorum figuræ, G O Q, sic productorum, nam hæc in illis tota reperientur, & aliquid amplius, vnde omnia plana figuræ, G O Q, sic producta erunt, vt effecta sint maiora omnibus planis figuræ, E A G; eodem modo

modo ostendemus nos posse sic producere omnia plana figuræ, E A G, vt fiant maiora omnibus planis figuræ, G O Q, ita productis, & sic deinceps; ergo omnia plana solidarum figurarum, E A G, G O Q, sunt magnitudines inter se rationem habentes, quod ostendere opus erat.

Diffin. 4. l. 5. Elem.

SCHOLIVM.

Posset fortè quis circa hanc demonstrationem dubitare, non rectè percipiens quomodo indefinitæ numero lineæ, vel plana, quales esse existimari possunt, quæ à me vocantur, omnes lineæ, vel omnia plana talium, vel talium figurarum possint ad inuicem comparari: Propter quod innuendum mihi videtur, dum considero omnes lineas, vel omnia plana alicuius figuræ, me non numerum ipsarum comparare, quem ignoramus, sed tantum magnitudinem, quæ adæquatur spatio ab eisdem lineis occupato, cum illi congruat, & quoniam illud spatium terminis comprehenditur, ideò & earum magnitudo est terminis eisdem comprehensa, quapropter illi potest fieri additio, vel subtractio, licet numerum earundem ignoremus; quod sufficere dico, vt illa sint ad inuicem comparabilia, alioquin neque ipsa spatia figurarum essent ad inuicem comparabilia: Vel enim continuum nihil aliud est prçter ipsa indiuisibilia, vel aliquid aliud, si nihil est præter indiuisibilia, profectò si eorum congeries nequit comparari, neque spatium, siue continuum, erit comparabile, cum illud nihil aliud esse ponatur, quam ipsa indiuisibilia: Si verò continuum est aliquid aliud præter ipsa indiuisibilia, fateri æquum est hoc aliquid aliud interiacere ipsa indiuisibilia, habemus ergo continuum disseparabile in quædam, quæ continuum componunt, numero adhuc indefinita, inter quælibet enim duo indiuisibilia æquum est interiacere aliquid illius, quod dictum est esse aliquid aliud in ipso continuo præter indiuisibilia, qua enim ratione tolleretur à medio duarum, à medijs quoque cæterarum tolleretur; hoc cum ita sit comparare nequibimus ipsa continua, siue spatia adinuicem, cum ea, quæ colliguntur, & simul collecta comparantur, scilicet, quæ continuum componunt, sint numero indefinita; absurdum, autem est dicere continua terminis comprehensa non esse ad inuicem comparabilia, ergo absurdum est dicere congeriem omnium linearum siue planorum, duarum quarumlibet figurarum non esse ad inuicem comparabilem, non obstante, quod quæ colliguntur, & illam congeriem componunt sint numero indefinita, veluti hoc non obstat in continuo, siue ergo continuum ex indiuisibilibus componatur, siue non, indiuisibilium congeries sunt adinuicem comparabiles, & proportionem habent.

Non

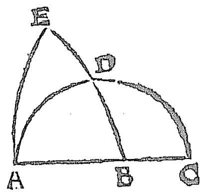
Non inutile autem mihi videtur esse animaduertere pro huius confirmatione, hoc pro vero supposito, quam plurima, quæ ab Euclide, Archimede, & alijs ostensa sunt, à me pariter fuisse demonstrata, measq; conclusiones ad vnguem cum illorum conclusionibus concordare, quod euidens signum esse potest, me in principijs vera assumpsisse, licet sciam, & ex falsis principijs sophisticè vera aliquando deduci posse, quod tamen in tot, & tot conclusionibus, methodo geometrica demonstratis mihi accidisse absurdum putarem: Hoc tamen addo, non tanquam præfatæ veritatis legitimum fundamentum, sed vt non negligendum, immò summè expendendum illius argumentum, quod sequentia percurrenti continuò magis, ac magis elucescet.

THEOREMA II. PROPOS. II.

Æqualium planarum figurarum omnes lineæ sunt æquales, & æqualium solidarum omnia plana sunt æqualia, regula quauis assumpta.

Sint duę æquales planę figuræ, ADC, AEB, in figura, ADC, sit regula, AC, vtcunque, & in figura, AEB, regula vtcunque sit, AB. Dico omnes lineas figuræ, ADC, regula, AC, ęquales esse omnibus lineis figurę, AEB, regula, AB; intelligatur figuram, AEB, ita superponi figuræ, ADC, vt regulæ sint ad inuicem superpositę, velut est, AB, in, AC, vel saltem ęquidistent, vel ergo tota figura congruit toti, vel pars parti, congruat pars parti, ergo congruentium harum partium omnes lineæ erunt pariter congruentes, scilicet omnes lineę, ADB, partis figurę, AEB, erunt congruentes omnibus lineis, ADB, partis figuræ, ADC, superponantur adhuc residuæ harum figurarum partes, hac lege tamen, vt omnes earundem lineæ regulis, AB, AC, siue regulę communi, AB, vel, AC, semper situentur æquidistantes, & hoc semper fiat, donec omnes residuę partes ad inuicem superpositæ fuerint, quia ergo integræ figuræ sunt æquales erunt dictæ partes superpositæ inuicem congruentes, ergo & earum omnes lineæ erunt pariter congruentes, magnitudines autem congruentes sunt ad inuicem æquales, ergo omnes lineæ partium figuræ, AEB, simul sumptarum .s. omnes lineæ figuræ, AEB, sumptæ regula, AB, erunt ęquales omnibus lineis partium figurę, ADC, quibus prędictæ partes congruerunt, simul sumptarum .s. omnibus lineis figu-

Postul. 1. huius.



ræ,

ræ, ADC, sumptis, regula, AC, quod in figuris planis ostendendum erat.

Ita superpositis æqualibus figuris solidis, ita vt duæ in ipsis assumptæ vtcunq; regulæ sint ad inuicem superpositæ, vel æquidistantes, & residuorum facta semper superpositione ita, vt omnia eorum plana regulis iam superpositis ęquidistent, tandem, quia figurę sunt æquales, dictæ partes erunt ad inuicem congruentes, & consequenter integrę quoq; figuræ erunt congruentes, ergo earum omnia plana sumpta cum dictis regulis erunt ad inuicem congruentia, ergo & æqualia, quod in figuris solidis ostendere quoque opus erat.

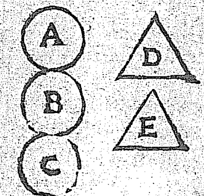
COROLLARIVM.

Hinc patet in eadem figura plana, omnes lineas sumptas cum quadam regula æquari omnibus lineis sumptis cum alia quauis regula; & in figuris solidis omnia plana vnius sumpta cum quadam regula æquari omnibus planis eiusdem, regula quauis assumpta; vnde ex. gr. secto planis cylindro æquidistanter axi, qua sectione in ipso creantur parallelogramma, & secto eodem planis æquidistanter basi ductis, qua sectione creantur in eodem circuli, patet ex hoc, omnia parallelogramma dicti cylindri, regula eorundem vno, esse æqualia omnibus circulis eiusdem, regula basi. Coroll. 6. lib. 1. Corol. 12. lib. 1.

THEOREMA III. PROPOS. III.

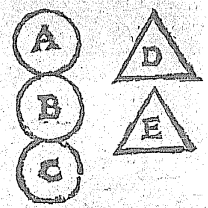
Figuræ planæ habent inter se eandem rationem, quam eorum omnes lineæ iuxta quamuis regulam assumptæ; Et figuræ solidæ, quam eorum omnia plana iuxta quamuis regulam assumpta.

Sint figuræ planæ vtcunque, A, D. Dico, A, figuram ad figuram, D, esse vt omnes lineę figuræ, A, iuxta quamuis regulam assumptæ ad omnes lineas figuræ, D, iuxta quamuis regulam assumptas. Intelligantur ergo omnes lineæ figuræ, A, &, D, assumptæ iuxta quasdam regulas, deinde capiantur quotcunque figuræ, BC, singulæ æquales figuræ, A, & figuræ, D, quotcunque ęquales figurę, vt, E; nunc, si continuum componitur ex indiuisibilibus, patet absque alia demonstratione figuram, A, ad figuram, D, esse vt omnes lineæ figurę, A, ad omnes



nes

nes lineas figurę, D, tunc enim comparare continuum ad continuum
non esset nisi ipsa indiuisibilia comparare; sed esto, quod hoc sit fal-
sum, vel quod, etiamsi verum sit, tamen legitima ratione ad hoc pro-
bandum nondum peruenerimus; nihilominus adhuc dico ipsa indi-
uisibilia .s. omnes lineas figurę, A, ad omnes lineas figuræ, D, esse
vt figuram, A, ad figuram, D. Quoniam ergo assumpsimus figu-
ras, B, C, singulas æquales figuræ, A, &, E, æqualem figuræ, D,
omnes lineæ singularum figurarum, A, B, C, erunt æquales omni-
bus lineis figuræ, A, sumptis iuxta dictam regulam (quacunque re-
gula dictæ omnes lineæ sint assumptæ) & ideò quotuplex erit com-
positum ex figuris, A B C, figuræ, A, totuplex erit compositum ex
omnibus lineis figurarum, A B C, omnium linearum figuræ, A, &
ideò habebimus æquè multiplicia primæ, & tertiæ vtcunq; sumpta;
. niliter ostendemus compositum ex figuris, E, D, æquè multiplex
esse figuræ, D, ac compositum ex omnibus li-
neis figurarum, E, D, multiplex est omnium
linearum figuræ, D, quæ sunt æquè multipli-
cia secundæ, & quartę vtcunque sumpta, quia
ergo si multiplex primę .s. compositum ex figu-
ris, A B C, superauerit multiplex secundę, sci-
licet compositum ex figuris, D E, etiam mul-
tiplex tertiæ .s. compositum ex omnibus lineis
figurarum, A B C, superabit multiplex quartæ
.s. compositum ex omnibus lineis figurarum, D E, & si multiplex pri-
mæ fuerit æquale multiplici secundæ, etiam multiplex tertię erit æ-
quale multiplici quarte, scilicet si compositum ex figuris, A B C,
fuerit æquale composito ex figuris, D E, etiam eorundem compo-
sitorum omnes lineæ erunt æquales, & si minus, minus, ideò prima
ad secundam erit, vt tertia ad quartam, scilicet figura, A, ad figu-
ram, D, erit vt omnes lineæ figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D,
sumptas iuxta datas regulas .s. iuxta quascunq; regulas, quod in fig.
planis erat ostendendum.



Per antecedentem. (margin: Per antecedentem.)

Verum si intellexerimus, A, D, esse figuras solidas, assumentes,
C, B, singulas æquales ipsi, A, &, E, ipsi, D, ostendemus com-
positum ex figuris, A B C, tam multiplex esse figurę, A, ac compo-
situm ex omnibus planis figurarum, A, B, C, multiplex est omnium
planorum figurę, A, & sic compositum ex figuris, D, E, tam mul-
tiplex esse figuræ, D, ac compositum ex omnibus planis figurarum,
D E, multiplex est omnium planorum figuræ, D, & tandem per
antecedentem Propositionem ostendemus, si multiplex primæ supe-
rauerit multiplex secundę, etiam multiplex tertiæ superaturum mul-
tiplex quartæ, & si minus, minus, vel si æquale, & ęquale fore, er-
go

Elicitur ex antec.

Defin. 5. Qui. El.

Coroll. 1. huius.

go prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, scilicet figura so-
lida, A, ad figuram solidam, D, erit vt omnia plana, A, ad om-
nia plana, D, cum quibusuis regulis assumpta, quod & in figuris so-
lidis ostendere opus erat.

Def. Qui. 5. Elem.

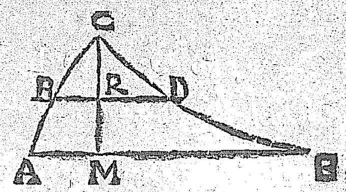
COROLLARIVM.

Liquet ex hoc, quod, vt inueniamus, quam rationem habeant inter se duæ figuræ planæ, vel solidæ, sufficiet nobis reperire, quam, in figuris planis, inter se rationem habeant earundem omnes lineæ, &, in figuris solidis, earundem omnia plana iuxta quamuis regulam assumpta, quod nouæ huius meæ Geometriæ veluti maximum iacio fundamentum.

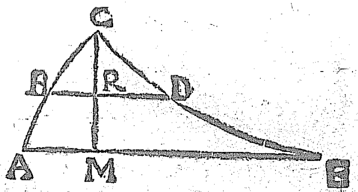
THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI duæ figuræ planæ, vel solidæ, in eadem altitudine fuerint constitutæ, ductis autem in planis rectis lineis, & in figuris solidis ductis planis vtcumque inter se parallelis, quorum respectu prædicta sumpta sit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, seu ductorum planorum portiones figuris solidis interceptas, esse magnitudines proportionales, homologis in eadem figura semper existentibus, dictæ figuræ erunt inter se, vt vnum quodlibet eorum antecedentium, ad suum consequens in alia figura eidem correspondens.

Sint primò duæ figurę planæ in eadem altitudine constitutæ, C A M, C M E, in quibus duæ vtcunque rectæ lineæ inuicem parallelæ ductæ intelligantur, A E, B D, respectu quarum communis altitudo assumpta intelligatur, sint autem portiones figuris interceptæ ipsæ, A M, B R, in fig. C A M, &, M E, R D, in fig. C M E, reperiatur autem, vt, A M, ad, M E, ita esse, B R, ad, R D. Dico figuram, C A M, ad figuram, C M E, esse vt, A M, ad, M E, vel, B R, ad, R D, quoniam enim, B D, A E, vtcumq; ductæ sunt inter se æquidistantes, patet, quod quęlibet earum, quę dicuntur omnes lineæ figuræ, C A M, sumptæ regula altera ipsarum,



A M, B R, ad eam, quæ illi indirectum iacet in figura, C M E, erit vt, B R, ad, R D, vel vt, A M, ad, M E, vt igitur, A M, ad, M E, vnum .s. antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnia antecedentia, nempè omnes lineę figurę, C A M, regula, A M ad omnia consequentia, scilicet ad omnes lineas figuræ, C M E, regula, M E; indefinitus .n. numerus omnium antecedentium, & consequentium, qui pro vtrisque hic idem est, quicunque sit (& hoc nam figuræ sunt in eadem altitudine, & cuilibet antecedenti in figura, C A M, assumpto respondet suum consequens illi in directum in alia figura constitutum) non obstat quin omnes lineę



2. huius. figurę, C A M, sint comparabiles omnibus lineis figurę, C M E, cum ad illas rationem habeant, vt probatum est, & ideò omnes lineæ figuræ, C A M, regula, A M, ad omnes lineas figurę, C M E, regula, M E, erunt vt, A M, ad, M E, verum, vt omnes lineæ figuræ,
3. huius. C A M, ad omnes lineas figurę, C M E, ita fig. C A M, est ad figuram, C M E, ergo figura, C A M, ad figuram, C M E, erit vt, B R, ad, R D, vel, A M, ad, M E, quod in figuris planis ostendere opus erat.

Si verò supponamus, C A M, C M E, esse figuras solidas, & vice rectarum, A M, B R, M E, R D, plana intelligamus figuris, C A M, C M E, intercepta inuicem parallela, & ita constituta, vt plana, A M, M E, iaceant in eodem plano, veluti se habeant etiam plana, B R, R D, respectu quorum præfata altitudo assumpta quoq; intelligatur, eadem methodo procedentes ostendemus omnia plana figuræ, C A M, ad omnia plana figuræ, C M E, idest figuram solidam,
3. huius. C A M, ad figuram solidam, C M E, esse vt planum, B R, ad planum, R D, vel vt planum, A M, ad planum, M E, quod & in solidis ostendere opus erat.

COROLLARIVM.

Colligitur ex hoc in figuris planis, vel solidis, si magnitudines comparatæ sint lineæ rectæ, vel plana, sint autem illæ, quæ dicuntur omnes lineæ, vel omnia plana dictarum figurarum, de illis quoq; verificaui, vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita esse omnia antecedentia ad omnia consequentia; & in supradictis figuris planis omnes lineas vnius ad omnes lineas alterius, vel in solidis omnia plana vnius ad omnia plana alterius, esse vt vnum antecedentium ad vnum con-

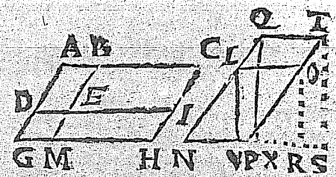
con-

consequentium, iuxta quæ, tanquam regulas, dictæ omnes lineæ, vel omnia plana intelliguntur assumpta.

THEOREMA V. PROPOS. V.

Parallelogramma in eadem altitudine existentia inter se sunt, vt bases; & quę in eadem basi, vt altitudines, vel, vt latera æqualiter basibus inclinata.

Sint parallelogramma quæcunque, A M, M C, in eadem altitudine constituta, sumpta altitudine iuxta bases, G M, M H. Dico parallelogrammum, A M, ad parallelogrammum, M C, esse vt, G M, ad, M H. Ducatur quęcunq; intra parallelogramma, A M, M C, parallela ipsis, G M, M H, cuius portiones parallelogrammis, A M, M C, interceptę sint, D E, E I. Quoniam ergo, D M, est parallelogrammum, sicut &, E H, erit, D E, ęqualis ipsi, G M, &, E I, ipsi, M H, erit igitur, G



M, ad, M H, vt, D E, ad, E I, &, D E, E I, ductæ sunt vtcunq; parallelæ ipsis, G M, M H, ergo parallelogramma, A M, M C, erunt ex genere figurarum Theorematis anteced. ergo, A M, ad, M C, erit vt, D E, ad, E I, vel vt, G M, ad, M H, quæ sunt eorundem bases. Hæc autem verificabuntur etiam si altitudines æquales fuerint, vt facilè patet.

Sint nunc parallelogramma, Q P, L P, in eadem basi, N P, constituta. Dico eadem esse, vt altitudines sumptæ iuxta basim, N P, demittantur ergo, O R, T S, altitudines in, N P, productam, in punctis, R S, illi occurrentes (nisi fortè, T P, O P, essent ipsæ altitudines, vel intra parallelogramma inciderent basi, N P,) & à punctis, Q, L, illis parallelæ, Q X, L V, in punctis, V, X, basi, N P, incidentes, sunt igitur parallelogramma, Q S, L R, in ęqualibus altitudinibus, Q T, L O, sumptis iuxta bases, T S, O R, ergo parallelogramma, Q S, L R, erunt inter se, vt bases, T S, O R, est autem parallelogrammum, Q S, æquale parallelogrammo, Q P, &, L R, ipsi, L P, ergo parallelogramma, Q P, L P, erunt inter se, vt, T S, O R, quæ pro ipsis sunt altitudines sumptæ iuxta basim, N P. Si autem latus, O P, extenderetur super latus, P T, idest latera, O P, P T, essent æqualiter inclinata communi basi, N P, tunc sumptis pro basibus ipsis, T P, O P, haberemus parallelogramma, Q P, L P, in

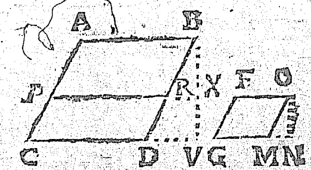
Ex prima parte huius Prop.

Ex prima parte huius Propos. P, in eadem altitudine sumpta iuxta bases, T P, O P, & ideò essent, vt ipsæ bases, T P, O P, idest vt latera, T P, O P, æqualiter basi, N P, inclinata, hæc autem pariter verificabuntur etiamsi basis, N P, non sit communis, sint tamen duæ bases æquales, quæ ostendere opus erat.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

Parallelogramma habent rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum iuxta easdem bases sumptarum, siue laterum æqualiter basibus inclinatorum, cum scilicet illa sunt æquiangula.

Sint parallelogramma vtcunque, A D, F M. Dico eadem habere inter se rationem compositam ex rationibus basium, quæ sint, C D, G M, & altitudinum, quę sint, B V, O N, sumptæ iuxta bases, C D, G M, illisque productis, si opus sit, in punctis, V, N, occurrentes, siue ex ratione laterum, B D, O M, si sint æquiangula: Abscindatur à, B V, versus, V, ipsa, X V, æqualis ipsi, O N, & per, X, ducatur, X P, parallela, C D, secans, B D, in, R, vt fiat parallelogrammum, P D, in eadem altitudine cum parallelogrammo, F M, & in eadē basi cum parallelogrammo, A D. Parallelogrammum ergo, A D, ad parallelogrammum, F M, sumpto medio de foris parallelogrammo, P D, habet rationem compositam ex ratione parallelogrammi, A D, ad parallelogrammum, P D, idest ex ratione, quam habet, B V, ad, V X, vel, O N, siue, B D, ad, D R, quoniam, A D, P D, sunt æquiangula, idest ex ratione, B D, ad, O M, & hoc quotiescunque, P D, F M, sint pariter æquiangula, & insuper est composita ex ea, quam habet parallelogrammum, P D, ad parallelogrammum, F M, idest ex ea, quam habet, C D, ad, G M, ergo parallelogrammum, A D, ad parallelogrammum, F M, habet rationem compositam ex ea, quam habet, B V, ad, O N, quæ sunt altitudines, vel etiam ex ea, quam habet, B D, ad, O M, si, A D, F M, sint æquiangula; & ex ea, quam habet, C D, ad, G M, quod ostendere opus erat.



Defin. 12. lib. 1.

Defin. 12. lib. 1.

Ex secun. par. ant.

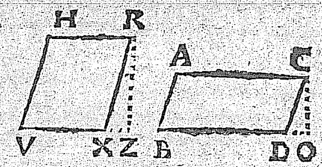
Ex prima parte anteced.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Parallelogramma, quorum bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocantur, sunt æqualia, & quæ sunt æqualia, bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas.

Sint parallelogramma, H X, A D, quorum bases, V X, B D, reciprocentur eorum altitudinibus, C O, R Z, vel lateribus, C D, R X, quotiescunq; sint æqualiter basibus inclinata. Dico hæc parallelogramma esse æqualia; etenim parallelogrammum, H X, ad parallelogrammum, A D, habet rationem compositam ex ea, quam habet, V X, ad, B D, &, R Z, ad, C O, siue, R X, ad, C D, cum illa sunt æquiangula, est autem, vt, V X, ad, B D, ita, C O, ad, R Z, vel, C D, ad, R X, cum illa sunt æquiangula, ergo parallelogrammum, H X, ad parallelogrammum, A D, habet rationem compositam ex ea, quam habet, C O, ad, R Z, &, R Z, ad, C O, siue ex ea, quam habet, C D, ad, R X, &, R X, ad, C D, quæ est eadem ei, quam habet, C D, ad, C D, vt illa est eadem ei, quam habet, C O, ad, C O, suntque proportiones æqualitatis, ergo parallelogrammum, H X, erit æquale parallelogrammo, A D.



Ex antecedente.

Defin. 12. lib. 1.

Sint nunc parallelogrammum, H X, æquale parallelogrammo, A D. Dico, vt, V X, ad, B D, ita esse, C O, ad, R Z, vel, C D, ad, R X, cum sunt æquiangula. Quoniam ergo parallelogrammum, H X, est æquale parallelogrammo, A D, erit ad illud, vt, C O, ad, C O, vel vt, C D, ad, C D, idest (de foris sumpto, R Z, vel pro secunda ratione, R X,) in ratione composita ex ea, quam habet, C O, ad, R Z, & ex ea, quam habet, R Z, ad, C O, vel ex ea, quam habet, C D, ad, R X, &, R X, ad, C D, verum, H X, ad, A D, habet etiam rationem compositam ex ea, quam habet, V X, ad, B D, &, R Z, ad, C O, vel, R X, ad, C D, cum sunt æquiangula, ergo duæ rationes, C O, ad, R Z, &, R Z, ad, C O, vel, C D, ad, R X, &, R X, ad, C D, componunt eandem rationem, quam istę duæ .s. V X, ad, B D, &, R Z, ad, C O, vel, R X, ad, C D, est autem communis ratio, quam habet, R Z, ad, C O, vel, R X, ad, C D, ergo reliqua ratio .s. quam habet, V X, ad, B D, erit eadem

Defin. 12. lib. 1.

Ex antece.

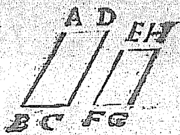
ei,

ei, quam habet, C O, ad, R Z, vel, C D, ad, R X, cum sunt æqui-angula, ergo æqualia parallelogramma bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocas, quod ostendere opus erat.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

Similia parallelogramma sunt in dupla ratione laterum homologorum.

Sint similia parallelogramma, A C, E G. Dico eadem esse in dupla ratione laterum homologorum: Quoniam enim sunt similia illa (Iux diff. Sex. El.) sunt æquiangula, sint anguli, B C D, F G H, æquales, & latera homologa, B C, F G; C D, G H, si ergo pro basibus sumpserimus ipsas, B C, F G, erit, (6. huius.) A C, ad, E G, in ratione composita ex ea, quam habet, B C, ad, F G, & ex ea, quam habet, D C, ad, H G, quæ est eadem ei, quam habet, B C, ad, F G, vel, F G, ad tertiam proportionalem duarū, primę nempè, B C, & secundæ, F G, ergo, A C, ad, E G, erit vt, B C, ad tertiam proportionalem duarum primę, nempè, B C, & secundę, F G, i. erit in dupla ratione eius, quam habet, B C, ad, F G, vel, C D, (Defin. 10. 5. Elem.) ad, G H, quod ostendere opus erat.



COROLLARIVM.

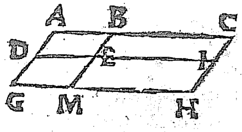
Hinc patet, quæ de parallelogrammis in superioribus Propositionibus ostensa sunt, eadem de eorundem omnibus lineis cum quibusuis regulis assumptis pariter verificari, nam illa sunt, vt ipsa parallelogramma. (3. huius.)

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

Parallelogrammorum in eadem altitudine existentium omnia quadrata, regula basi, iuxta quam altitudo sumpta est, sunt inter se, vt quadrata basium. (A. Def. 8 huius.)

Sint

Sint igitur parallelogramma, A M, M C, in eadem altitudine. Dico omnia quadrata parallelogrammi, A M, ad omnia quadrata parallelogrammi, M C, regula, G H, esse vt quadratum, G M, ad quadratum, M H. (A. Def. 8. huius.) Sit intra parallelogramma, A M, M C, ducta vtcunque, D I, parallela ipsi, G H, cuius portio, D E, maneat in, A M, &, E I, in, B H, quoniam ergo, D E, est æqualis ipsi, G M, figurę autem planæ similes descriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus sunt æquales, & ideò (25. lib. 1.) quadratum, D E, erit æquale quadrato, G M, & quadratum, E I, quadrato, M H, ergo, vt quadratum, G M, ad quadratum, M H, ita erit quadratum, D E, ad quadratum, E I, & quia, D I, vtcunq; ducta est parallela ipsi, G H, ideò, vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia idem vt quadratum, G M, ad quadratum, M H, ita (Coroll. 4. huius.) erunt omnia quadrata parallelogrammi, A M, ad omnia quadrata parallelogrammi, M C, regula, G H, quod erat ostendendum.



COROLLARIVM.

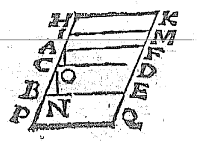
Hinc patet, si vice quadratorum sumamus alias quascunque figuras similes, quod eodem pacto ostendemus omnes figuras similes parallelogrammi, A M, ad omnes similes figuras parallelogrammi, M C, (A. Def. 8. huius.) vt ex. gr. omnes circulos parallelogrammi, A M, ad omnes circulos parallelogrammi, M C, esse vt similes figuras ab ipsis basibus, G M, M H, descriptas, nam figuræ planæ similes quæcunq; vt dictum est, descriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus sunt æquales; omnibus pariter assumptis figuris similibus, regula eadem, G H. (25. lib. 1.)

THEOREMA X. PROPOS. X.

Parallelogrammorum in eadem basi existentium omnia quadrata, regula ipsa basi, sunt vt altitudines, vel vt latera, quę æqualiter basi sunt inclinata, si illa sint ęquiangula.

Sint parallelogramma, A D, B D, in eadem basi, C D, existentia, quorum sint altitudines iuxta basim, C D, sumptæ, A O, C N. Dico omnia quadrata parallelogrammi, A D, ad omnia quadrata parallelogrammi, B D, regula, C D, esse vt, A O, ad, C N, vel etiam vt, AC, ad, C B, si parallelogramma, B D, D A, fuerint æquiangula, producantur autem, C A, C B, indefinitè ad partes op-

positas, ex quibus sumantur quotcunque partes æquales, A I, I H, nempè æquales ipsi, C A, &, B P, æqualis ipsi, B C, & compleantur parallelogramma, A M, I K, B Q; sunt igitur parallelogramma, C F, A M, I K, in æqualibus altitudinibus, ac basibus, & ideò singulorum omnia quadrata regulis eisdem basibus, erunt æqualia, &
9. Huius. pari ratione omnia quadrata parallelogrammorum, B Q, C Q, erunt ęqualia, regula, C D, altitudines autem parallelogrammorum, C F, A M, I K, sunt æquales ipsi, A O, & altitudines parallelogrammorum, C E, B Q, sunt æquales, nempè ipsi, C N, habemus ergo æquèmultiplices primę, & tertiæ .s. compositum ex altitudinibus parallelogrammorum, C F, A M, I K, quod tam multiplex est altitudinis, A O, quam compositum ex omnibus quadratis, C F, A M, I K, multiplex est omnium quadratorum parallelogrammi, C F, & sic compositum ex altitudinibus parallelogrammorum, C E, B Q, tam multiplex est altitudinis, C N, ac compositum ex omnibus quadratis parallelogrammorum, B Q, C E, multiplex est omnium quadratorum, C E; idest quam multiplicia sunt



omnia quadrata parallelogrammi, H D, omnium quadratorum parallelogrammi, A D, tam altitudo parallelogrammi, H D, multiplex est altitudinis parallelogrammi, A D, siue tam ipsa, C H, multiplex est ipsius, C A, dum sunt æquiangula, & quam omnia quadrata parallelogrammi, PD, multiplicia sunt omnium quadratorum parallelogrammi, B D, tam altitudo parallelogrammi, P D, multiplex est altitudinis, C N, vel tam, P C, multiplex est ipsius, C B: Si autem multiplex primæ fuerit æquale multiplici secundæ, etiam multiplex tertiæ erit æquale multiplici quartæ, si maius maius, & si minus minus, nam si altitudo parallelogrammi, H D, fuerit æqualis altitudini parallelogrammi, D P, omnia quadrata, H D, erunt æqualia omnibus quadratis, D P, nam parallelogramma, H D, D
Ex antec. P, sunt in eadem basi, C D, si illa maior, & hæc maiora, & si minor minora, ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam,
5. Quinti Elem. nempè vt altitudo parallelogrammi, A D, ad altitudinem parallelogrammi, D B, .s. A O, ad, C N, vel, A C, ad, C B, dum sunt æquiangula, ita erunt omnia quadrata, A D, ad omnia quadrata, D B, sunt ergo, vt altitudines ipsorum parallelogrammorum, vel vt latera ęqualiter basi inclinata, cum nempè parallelogramma sunt æquiangula: hæc autem etiam verificarentur si parallelogramma essent in æqualibus basibus, quod ostendere opus erat.

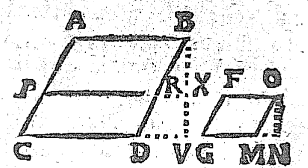
COROLLARIVM.

Eadem ratione, si vice quadratorum sumamus alias figuras similes, ostendemus omnes figuras similes parallelogrammorum in eadem basi existentium esse, vt altitudines, vel vt latera basi æqualiter inclinata, dum illa sunt æquiangula. A. Def. 8. huius.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

Qvorumlibet parallelogrammorum omnia quadrata regulis duobus quibusuis in eisdem assumptis lateribus, habent inter se rationem compositam ex ratione quadratorum dictorum laterum, & altitudinum, vel laterum, quę cum prędictis ęqualiter inclinãtur, si illa sint ęquiangula.

Sint parallelogramma vtcunq; A D, F M, in quibus regulæ extent latera vtcunque, C D, G M, altitudines autem iuxta dictas regulas sumptæ, B V, O N. Dico omnia quadrata, A D, ad omnia quadrata, F M, habere rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, C D, ad quadratum, G M, & ex ea, quam habet, B V, altitudo ad altitudinem, O N, vel etiam, B D, ad, O M, si illa sint æquiangula, lateraq; B D, O M, æqualiter sint inclinata cum lateribus, C D, G M; abscindatur à, B V, versus, V, ipsa, X V, æqualis, O N, & per, X, ducatur, X P, parallela ipsi, C D, secans, B D, in, R, erit autem, D R, æqualis ipsi, O M, si sint æquiangula, quod facilè probari potest, erit etiam parallelogrammum, P D, in eadem basi cum parallelogrammo, A D,



sed in eadem altitudine cum parallelogrammo, F M, omnia ergo quadrata parallelogrammi, A D, ad omnia quadrata, F M, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, A D, ad omnia quadrata, D P, .i. ex ea, quam habet, B V, ad, V X, siue, O N, vel ex ea, quam habet, B D, ad, D R, siue, O M, si sint æquiangula parallelogramma, A D, D P; & componitur ex ea, quam habent omnia quadrata, P D, ad omnia quadrata, F M, .i. ex ea, quam habet quadratum, C D, ad quadratum, G M, ergo omnia quadrata, A D, ad omnia quadrata, F M, habent rationem compo-

Defin. 12. lib. 1. — Ex antec. — 9. huius.

positam ex ea, quam habet, B V, ad, O N, vel, B D, ad, O M, cum sunt æquiangula, & ex ea, quem habet quadratum, C D, ad quadratum, G M, quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

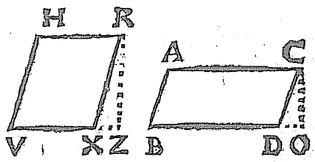
Hinc patet, si vice quadratorum sumamus alias figuras planas similes, quod eodem pacto ostendemus omnes figuras similes, A D, F M, habere inter se rationem compositam ex ratione quadratorum, C D, G M, & altitudinum, B V, O N, vel laterum, B D, O M, æqualiter basibus inclinatorum, cum parallelogramma sunt æquiangula.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

Parallelogrammorum, quorum basium quadrata altitudinibus iuxta easdem bases sumptis reciprocantur, vel lateribus æqualiter dictis basibus inclinatis; omnia quadrata, regulis eisdem basibus, sunt æqualia: Et quorum parallelogrammorum, regulis basibus, omnia quadrata sunt æqualia, basium quadrata altitudinibus, vel lateribus æqualiter dictis basibus inclinatis, reciprocantur.

Sint parallelogramma, H X, A D, quorum basium, V X, B D, quadrata altitudinibus iuxta ipsas bases sumptis, vel lateribus, R X, C D, si hæc basibus, V X, B D, æqualiter sint inclinata, reciprocentur. Dico omnia quadrata parallelogrammorum, H X, A D, esse inter se æqualia. Nam omnia quadrata, H X, ad omnia quadrata, A D, habent rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, V X, ad quadratum, B D, .i. ex ea, quam habet, C O, ad, R Z, vel, C D, ad, R X, cum sunt æquiangula, & ex ea, quam habet, R Z, ad, C O, vel, R X, ad, C D, quæ duæ rationes componunt rationem, C O, ad, C O, vel, C D, ad, C D, quæ est ratio æqualitatis, & ideò omnia quadrata, H X, erunt æqualia omnibus quadratis, A D.

Ex anteced.



Sint nunc omnia quadrata, H X, æqualia omnibus quadratis, A D, regulis eisdem, V X, B D. Dico quadratum, V X, ad quadratum, B D, esse vt, C O, ad, R Z, vel, C D, ad, R X, cum sunt æquian-

quiangula, etenim, C O, ad, C O, habet rationem compositam ex ea, quam habet, C O, ad, R Z, & R Z, ad, C O, & sic, C D, ad, C D, ex ea, quam habet, C D, ad, R X, &, R X, ad, C D, quia verò omnia quadrata, H X, sunt æqualia omnibus quadratis, A D, ideò sunt ad illa, vt, C O, ad, C O, vel vt, C D, ad, C D, .i. in ratione composita ex ratione, C O, ad, R Z, &, R Z, ad, C O, vel, C D, ad, R X, &, R X, ad, C D, sunt autem omnia quadrata, H X, ad omnia quadrata, A D, in ratione composita ex ea, quam habet quadratum, V X, ad quadratum, B D, &, R Z, ad, C O, siue, R X, ad, C D, cum sunt æquiangula, ideò duæ rationes, C O, ad, R Z, &, R Z, ad, C O, siue aliæ duę rationes, C D, ad, R X, &, R X, ad, C D, componunt eandem rationem, quam istę duę .s. ratio quadrati, V X, ad quadratum, B D, &, R Z, ad, C O, vel, R X, ad, C D, est autem communis ratio, R Z, ad, C O, vel, R X, ad, C D, ergo reliqua ratio, quam habet quadratum, V X, ad quadratum, B D, erit eadem reliquę, quam nempè habet, C O, ad, R Z, vel, C D, ad, R X, cum sunt æquiangula, quod erat ostendendum.

Defin. 12. lib. 1.

Ex antec.

COROLLARIVM.

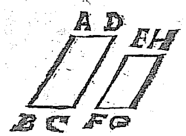
Idem eodem modo de omnibus figuris similibus quibusuis parallelogrammorum, H X, A D, regulis iisdem, V X, B D, ostendi posse ex superiori methodo colligitur.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

Similium parallelogrammorum omnia quadrata, regulis homologis lateribus, sunt in tripla ratione laterum homologorum.

Sint similia parallelogramma, A C, E G, quorum latera homologa, B C, F G, sint sumpta pro regula. Dico omnia quadrata, A C, ad omnia quadr. E G, esse in tripla ratione eius, quam habet, B C, ad, F G. Quoniam enim parallelogramma, A C, E G, sunt similia, ideò sunt æquiangula, & circa æquales angulos latera habent proportionalia, &, B C, C D; F G, G H, sunt latera ad inuicem æqualiter inclinata, quorum, B C, F G, sunt regulę, ideò omnia quadrata, A C, regula, B C, ad om-

Iux. diff. 1. Sex. El.



Ex def. 1. Sex. El.

omnia quadrata, E G, regula, F G, ſunt in ratione compoſita ex
11.huius. ratione quadrati, B C, ad quadratum, F G, & ex ratione, D C, ad, H G, ſiue, B C, ad, F G, ∴ in ratione compoſita ex tribus rationi-
Defin. 11. Quin. El. bus, B C, ad, F G, ideſt habent eandem rationem, quam, B C, ad quartam proportionalem duarum, quarum prima, B C, ſecunda eſt,
Defin. 11. Quin. El. F G, ∴ ſunt in tripla ratione eius, quam habet, B C, ad, F G, quod erat oſtendendum.

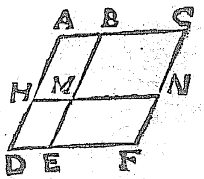
COROLLARIVM.

Hinc patet, quod eodem modo idem oſtendemus de omnibus quibuſuis alijs figuris ſimilibus parallelogrammorum, A C, E G vice quadratorum ſumptis, regulis eiſdem, ex ſuperioribus Corollarijs id deducentes.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

A. Def. 8. huius. SI duo parallelogramma fuerint in eadem altitudine conſtituta, omnes figuræ ſimiles vnius ad omnes figuras ſimiles alterius, etiamſi ſint diſſimiles primò dictis, regulis baſibus, iuxta quas altitudo ſumitur, erunt, vt figura deſcripta à baſi parallelogrammi primò dicti ad figuram deſcriptam à baſi parallelogrammi ſecundò dicti.

Sint parallelogramma in eadem altitudine conſtituta, A E, E C.
A. Def. 8. huius. Dico omnes figuras ſimiles parallelogrammi, A E, ad omnes figuras ſimiles parallelogrammi, E C, etiamſi ſint diſſimiles prædictis, eſſe vt figura deſcripta à, D E, ad figuram deſcriptam ab, E F, quæ ſunt baſes, iuxta quas ſumitur dictorum parallelogrammorum altitudo .ſ. ex. g. omnia quadrata, A E, ad omnes circulos, E C, eſſe vt quadratum, D E, ad circulum deſcriptum ab, E F. Ducta enim ipſa, H N, vtcunque parallela, D F, reperiemus, vt figura, D E, ad figuram, E F, ita eſſe figuram, H M, ad figuram, M N, quia quæ deſcribuntur lateribus,



..lib. 1. H M, D E, equalibus ſunt equales, veluti deſcriptę à lateribus, M N, E F, pariter ſunt æquales, & ideò, vt vnum
Coroll. 4. huius. ad vnum, ſic omnia ad omnia .ſ. vt figura deſcripta à, D E, ad figuram deſcriptam ab, E F, ſic erunt omnes figuræ ſimiles parallelo-
gram-

grammi, A E, ſimiles, inquam, figuræ deſcriptæ à, D E, ad omnes figuras ſimiles parallelogrammi, E C, ſimiles, inquam, figuræ deſcriptæ ab, E F, quod oſtendere opus erat.

COROLLARIVM.

Hinc in figura Propoſ. 11. colligemus omnes figuras ſimiles parallelogrammi, A D, ad omnes figuras ſimiles parallelogrammi, F M, etiam tamen diſſimiles prædictis, habere rationem compoſitam ex ratione figurarum, quæ à baſibus, C D, G M, deſcribuntur, & altitudinum, vel laterum æqualiter baſibus inclinatorum; quia omnes figuræ ſimiles, A D, ad omnes figuras ſimiles, F M, diſſimiles prædictis, habent rationem compoſitam ex ea, quam habent omnes figuræ ſimiles, A D, ad omnes figuras ſimiles, F M, ideſt compoſitam ex ratione figuræ deſcriptæ à, C D, ad ſibi ſimilem figuram deſcriptam à, G M, & ex ratione, B V, ad, O N, vel, B D, ad, O M, cum ſint parallelogramma æquiangula, & eſt compoſita ex ratione omnium figurarum ſimilium, F M, ad omnes figuras ſimiles ipſius, F M, diſſimiles tamen proximè dictis, quæ eſt eadem ei, quam habet figura, G M, ſimiles figuræ, C D, ad figuram, G M, vltimò deſcriptam, duæ verò rationes figuræ, C D, ad figuram, G M, ſibi ſimilem, & huius ad figuram, G M, ſibi diſſimilem componunt rationem figuræ, C D, ad figuram, G M, ſibi diſſimilem, & ideò habebimus omnes figuras ſimiles, A D, ad omnes figuras ſimiles ipſius, F M, diſſimiles tamen prædictis habere rationem compoſitam ex ea, quam habet figura ipſius, C D, ad figuram, G M, ſibi diſſimilem, & ex ea, quam habet, B V, ad, O N, vel, B D, ad, O M, cum parallelogramma ſunt æquiangula. Conſimili methodo in figura Propoſ. 12. colligemus omnes parallelogrammi, H X, figuras ſimiles, omnibus figuris ſimilibus parallelogrammi, A D, etiamſi prædictis ſint diſſimiles, eſſe tamen æquales; Et ſi ſint æquales, figuras deſcriptas ab, V X, B D, licet diſſimiles, altitudinibus, C O, R Z, vel lateribus, C D, R X, baſibus æqualiter inclinatis, reciprocè reſpondere.

Defin. 12. lib. 1.
Corol. 11. huius.
Ex ſuper. Prop.
Defin. 12. lib. 1.

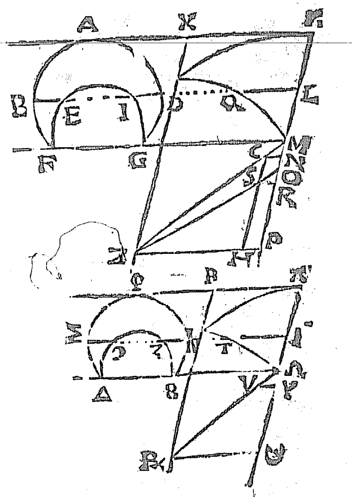
THEOREMA XV. PROPOS. XV.

OMNES figuræ planæ ſimiles ſunt inter ſe in dupla ratione linearum, ſiue laterum homologorum, earundem.

A. DE-

A. DEMONSTRATIONIS SECTIO I.

Sint duæ quæcunque figuræ planæ similes, ABD, ΦΣΛ. Dico easdem esse in dupla ratione linearum, vel laterum homologorum, earundem. Ducantur ipsarum oppositę tangentes, AK, FM, Coroll. 1. lib. 1. figuræ, ABD, &, ΦΠ, ΔΩ, figuræ, ΦΣΛ, quæ homologis earum lineis æquidistent, deinde sint intra dictas oppositas tangentes ductæ, KM, ΠΩ, taliter, vt illæ sint incidentes dictarum similium Coroll. 2. 9. lib. 1. figurarum, & tangentium, hoc facto, diuidantur ipsæ incidentes, KM, ΠΩ, similiter, & ad eandem partem vtcunq; in punctis, L, Γ, per quæ puncta sint ductæ ipsæ, BL, ΣΓ, quarum portiones figuris interceptę sint, BE, ID, in figura, ABD, &, Σ2, 3Λ, in figura, ΦΣΛ, sumatur autem ex, BL, recta æqualis vtrisque simul, BE, ID, terminans in, KM, quæ sit, QL, & pariter ipsius, Σ2, 3Λ, sit sumpta æqualis, TΓ, terminans in, ΠΩ, & in puncto, Γ, sicq; fiat de cæteris, quæ ipsis tangentibus æquidistant, & manent intra figurarum ambitum, quibus nempè in eadem rectitudine sumantur rectæ æquales in ipsis, KM, ΠΩ, terminatæ, erunt igitur omnium inuentarum linearum reliqui termini in alia quadam linea, quæ incipiet in puncto, K, & desinet in, M, pro figura, ABD, & quæ incipiet in Π, & desinet in, Ω, pro figura, 3. huius. ΦΣΛ, sint istę lineę, KQM, ΠΓΩ; patet igitur figuram, KQM, esse æqualem ipsi, ABD, & ΠΤΩ, ipsi, ΦΣΛ, nam omnes earum lineæ sumptæ regulis, FM, ΔΩ, sunt æquales, quod ex ipsa constructione patet; dicantur autem istæ constructiones, translationes omnium linearum figurarum, ABD, ΦΣΛ, in figuras, KQM, ΠΤΩ, ipsi, KM, ΠΩ, adiacentes, effectę regulis dictis tangentibus. Patet vlterius figuras, KQM, ΠΤΩ, esse similes, nam homologę Coroll. 23. lib. 1. figurarum, ABD, ΦΣΛ, (quia illę sunt similes) sunt vt incidentes, KM, ΠΩ, eædem autem in figuris, KQM, ΠΤΩ, modo dicto, translatæ sunt (simul in vnam rectam coniunctis, quæ diuisæ erant, velu-



veluti, BE, ID, iunctæ sunt in linea, QL, &, Σ2, 3Λ, in linea, TΓ,) ergo quę tangentibus dictis æquidistant in figuris, KQM, ΠΤΩ, & diuidunt incidentes, KM, ΠΩ, similiter ad eandem partem, & iacent inter ipsas incidentes, & circuitum figurarum ad eandem partem eodem ordine sumptæ, sunt vt ipsæ incidentes, ergo figurę, KQM, ΠΤΩ, sunt similes, & earundem homologarum regulæ eædem tangentes, & earum incidentes ipsæ, KM, ΠΩ. Defin. 10. lib. 1.

B. SECTIO SECVNDA.

Producantur nunc ipsę, KM, ΠΩ, indefinitè versus puncta, M, Ω, & ab ipsis productis sumantur partes æquales, MP, ipsi, KM, &, Ω&, ipsi, ΠΩ, & per puncta, P, &, ducantur dictis tangentibus parallelę, ZP, ℞&, quoniam ergo, KM, ΠΩ, sunt incidentes similium figurarum, KQM, ΠΤΩ, ideò habebimus etiam homologas earundem regulis ipsis incidentibus, KM, ΠΩ, ductis ergo ex opposito tangentibus easdem figuras, KQM, ΠΤΩ, parallelis ipsis, KP, Π&, quæ sint, XZ, β℞, poterimus transferre omnes lineas figurarum, KQM, ΠΤΩ, in figuras ipsis, ZP, ℞&, adiacentes, translatione facta regulis, KP, Π&, fiant ergo dictę translationes, vnde resultent figuræ, MZP, Ω℞&, quæ erunt æquales ipsis, KQM, ΠΤΩ, & subinde ipsis, ABD, ΦΣΛ, probabimus autem etiam easdem esse similes (veluti in figuris, KQM, ΠΤΩ, factum est) &, ZP, ℞&, esse dictarum figurarum incidentes, & homologarum regulas ipsas, MP, Ω&, patet autem ex constructione integras esse in figuris, MZP, Ω℞&, tum quæ æquidistant ipsis, ZP, ℞&, tum ipsis, MP, Ω℞, nam ex prima translatione integras habuimus, quę in figuris, KQM, ΠΤΩ, ipsis, FM, ΔΩ, erant æquidistantes, & subinde etiam integras, quæ in figuris, MZP, Ω℞&, ipsis, ZP, ℞&, æquidistant, ex secunda translatione verò integras habuimus eas, quę ipsis, MP, Ω&, æquidistant, & hęc per constructionem, quæ omnia seruare opus est.

Corollar. 23. lib. 1.

Iux. Sect. A. huius Propos. 3. huius.

C. SECTIO III.

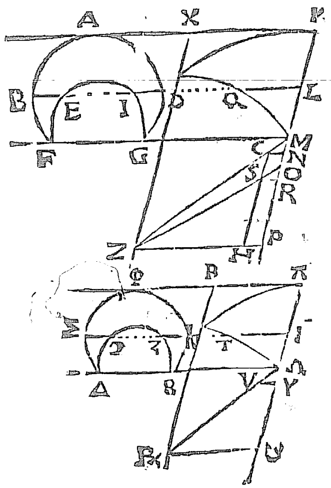
Nunc in figuris, MZP, Ω℞&, à maiori homologarum, MP, Ω&, quæ sit, MP, abscindatur, OP, æqualis ipsi, Ω&, & vt, MP, ad, PO, ita sit quælibet in figura, MZP, parallela ipsi, MP, ad eius portionem, & portionum termini sint ex vna parte in recta, ZP, ex alia verò in linea, ZO, erit ergo, vt vna ad vnam .i. vt, MP, ad, PO, ita omnia ad omnia, .i. ita omnes lineæ figuræ, Coroll. 4. huius. M Z P, ad omnes lineas figuræ, O Z P, regula, M P, & ideò vt, M P, ad, P O, vel ad, Ω &, ita figura, M Z P, ad figuram, O Z P, quod etiam ferua.

D. SECTIO IV.

VLterius ab ipsis, O P, Ω &, abſcindantur partes æquales, O R, Ω Y, & per puncta, R, Y, ducantur ipsis, Z P, ℞ &, æquidiſtantes, S R, V Y, & per, S, vbi, R S, ſecat lineam, Z O, ducatur, H C, æquidiſtans ipſi, M P, & per, C, vbi, H C, ſecat lineam, Z M, ducatur, C N, parallela ipſi, Z P, ſecans, M P, in, N; eſt igitur vt, M P, ad, P O, ita, C H, ad, H S, per conſtructionem .i. ita, N P, ad, P R, & permutando, vt, M P, ad, P N, ita, O P, ad, P R, diuidendo, vt, M N, ad, N P, ita, O R, ad, R P, .i. ita, Ω Y, ad, Y &, igitur ipſæ, C N, V Y, æquidiſtant regulis homologarum, quę ſunt, Z P, ℞ &, & diuidunt ad eandem partem ſimiliter ipſas incidentes, M P, Ω &, (ſi .n. Z P, ℞ &, ſtatueris regulas homologarum ipſę, M P, Ω &, ſunt incidentes, ſi verò has ſtatueris regulas, illæ erunt incidentes, ambę .n. terminant in oppoſitas tangentes, quæ ſunt regulæ homologarum earundem) ergo, C N, ad, V Y, erit vt, M P, ad, Ω &, .i. vt, Z P, ad, ℞ &, & ſunt, C N, S R, æquales, & , S R, V Y, vtcunque ductæ ipſis, Z P, ℞ &, æquidiſtantes, ergo vt, Z P, ad, ℞ &, ita, S R, ad, V Y, ergo vt, Z P, ad, ℞ &, ita erit figura, O Z P, ad figuram, Ω ℞ &, quod pariter ſerua.

Corollar. 23. lib. 1.

4. huius.



E. SECTIO V. ET VLTIMA.

D. fin. 12. lib. 1.

QVoniam verò figura, M Z P, ad figuram, Ω ℞ &, habet rationem compoſitam ex ratione figuræ, M Z P, ad figuram, O Z P, .i. ex ratione, M P, ad, Ω &, & ex ratione figuræ, O Z P, ad figuram, Ω ℞ &, .i. ex ratione ipſius, Z P, ad, ℞ &, .i. ex ratione

tione ipſius, M P, ad, Ω &, ideò figura, M Z P, ad figuram, Ω ℞ & habebit rationem compoſitam ex duabus rationibus ipſius, M P, ad, Ω &, .i. duplam eius, quam habet, M P, ad, Ω &, ſiue, K M, ad, Π Ω, quæ illis ſunt æquales, ſed & figuræ, A B D, Φ Σ Λ, ſunt æquales figuris, M Z P, Ω ℞ &, ergo figura, A B D, ad figuram, Φ Σ Λ, duplam rationem habebit eius, quam habet, K M, ad, Π Ω, quia verò, K M, &, Π Ω, ſunt incidentes ſimilium figurarum, A B D, Φ Σ Λ, ideò, vt, K M, ad, Π Ω, ita erit, B E I D, ſimul ad, Σ 2, 3 Λ, ſimul, vel ita, B E, ad, Σ 2, ſiue, I D, ad, 3 Λ, ergo figura, A B D, ad figuram, Φ Σ Λ, duplam rationem habebit eius, quam habet, B E, ad, Σ 2, vel, I D, ad, 3 Λ, .i. erunt iſtæ ſimiles figuræ in dupla ratione linearum, vel laterum homologorum, B E, Σ 2, vel, I D, 3 Λ, vel aliarum quarumcumque homologarum præfatis regulis æquidiſtantium, quod oſtendere opus erat.

Def. 12. Cum. E.

B. Def. 10. lib. 1.

Coroll. 1. 22. lib. 1.

COROLLARIVM I.

ET quia dictæ figuræ planæ ſimiles oſtenſæ ſunt eſſe in dupla ratione linearum, vel laterum homologorum, quæ æquidiſtant regulis vtcunque ſumptis, patet eaſdem eſſe in dupla ratione quarumuis homologarum, & duas quaſdam homologas ſumptas cum quibuſdam regulis, eſſe inter ſe, vt alias quaslibet duas homologas, cum alijs quibuſuis regulis aſſumptas, quod etiam in Corollario Lemmatis 48. Lib. 1. aliunde deductum eſt.

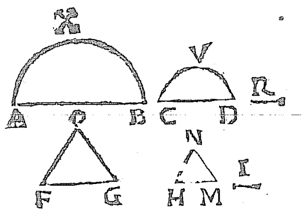
COROLLARIVM II.

VNiuersè inſuper manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ deinceps proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita eſſe figuram planam deſcriptam à prima ad eam, quæ à ſecunda deſcribitur; & huius conuerſum, dummodò deſcribentes ſint ſimilium deſcriptarum figurarum lineæ, ſiue latera homologa.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima autem, & ſecunda ſimiles figuras planas deſcripſerint, & tertia, & quarta alias figuras planas ſimiles, licet etiam prædictis diſſimiles eſſent, ita vt deſcribentes ſint earum lineæ, vel latera homologa, figura primæ ad figuram ſecundæ erit, vt figura tertiæ ad figuram quartæ. Et ſi fuerint quatuor figuræ planæ proportionales, ita vt quæ ſunt termini eiuſdem proportionis ſint figuræ ſimiles, deſcriptæ ab eorundem lineis, vel lateribus homologis; lineæ, vel latera homologa deſcribentia erunt proportionalia.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales, A B, C D, F G, H M, prima verò, & ſecunda deſcribant fig. planas ſimiles, A X B, C V D, &, F G, H M, ſimiles figuras planas, F O G, H N M, licet prędictis diſſimiles eſſent, & ſint deſcribentes figurarum deſcriptarum lineæ, vel latera homologa. Dico, A X B, ad, C V D, eſſe vt, F O G, ad, H N M. Sit, R, tertia proportionalis ipſarum, A B, C D, &, I, tertia proportionalis ipſarum, F G, H M; eſt igitur, A X B, ad, C V D, vt, A B,



Coroll. antec. ad, R, .i. in ratione dupla eius, quam habet, A B, ad, C D, .i. eius, quam habet, F G, ad, H M, .i. vt, F G, ad, I, quę eſt, vt, F O G, ad, H N M, ergo vt, A X B, ad, C V D, ita erit, F O G, ad, H N M.

Sit nunc figura, A X B, ad, C V D, ſibi ſimilem, vt, F O G, ad, H N M, ſibi ſimilem, licet iſtæ eſſent prædictis diſſimiles, & eas deſcribentes ſint earum lineæ, vel latera homologa. Dico, A B, ad, C D, eſſe vt, F G, ad, H M, ſit adhuc, R, tertia proportionalis ipſarum, A B, C D, &, I, tertia proportionalis ipſarum, F G, H M,
Coroll. antec. eſt ergo, vt figura, A X B, ad, C V D, ita, A B, ad, R, vt verò figura, F O G, ad, H N M, ita, F G, ad, I, eſt verò, vt, A X B, ad, C V D, ita, F O G, ad, H N M, ergo vt, A B, ad, R, ſic, F G, ad, I, eſt autem, A B, ad, R, dupla rationis ipſius, A B, ad, C D, &, F G, ad, I, dupla rationis ipſius, F G, ad, H M, ergo vt, A B, ad, C D, ita, F G, ad, H M, quæ oſtendere opus erat.

S C H O L I V M.

Propoſitionis proximè ſubſequentis nimia fortaſſe prolixitas faſtidium potius Lectori, quam delectationem pariet, veruntamen, qui hoc veretur, ac tantum otij, aut tolerantiæ habere nequit, vt illius ſatis longam texturam percurrere valeat, ipſam ſupponat, ac prætereat, his enim præcipuè à me dirigitur, quibus nec otium deeſt, nec ingenium, ac voluntas, pulchras demonſtrationes etſi difficiles, ác longas infracto quodam animi vigore ſuperandi, potius quam ab ipſis ſuperari velint. Poterat quidem in plures Propoſitiones commodius diſtribui, ſed cum illæ omnes in hanc ſimpliciſſimam eſſent conſpiraturæ, eas omnes ſub hac vna Propoſit. colligaui, quam tamen in Sectiones ceu in tot membra diſtinguere placuit, ne Lectoris mens nimium defatigaretur. Porrò quanti hæc Propoſitio ſit momenti, ſicut & præcedens Propoſ. 15. attenta præcipuè earum vniuerſalitate, neminem, qui eaſdem intellexerit, fore puto, qui itidem non agnoſcat; quid enim fuit, quo ad figuras planas, Euclidem lib. 6. Elementorum in Propoſ. 19. demonſtraſſe ſimilia triangula, & in Propoſ. 20. ſimilia Polygona eſſe in dupla ratione laterum homologorum, necnon lib. 12. Propoſ. 2. Circulos eſſe, vt diametrorum quadrata, hoc eſt in dupla ratione diametrorum? Similiter in eo, quod ſpectat ad ſolida, quid fuit ipſum nobis in lib. 12. Propoſ. 8. oſtendiſſe ſimiles Pyramides eſſe in tripla ratione laterum homologorum, & in Prop. 12. ſimiles conos, & cylindros eſſe in tripla ratione diametrorum, quæ ſunt in baſibus, & in Propoſ. 18. Sphæras itidem eſſe in tripla proportione diametrorum? Quid tandem fuit alios quoq; demonſtraſſe, quædam alia ſimilia ſolida, vt portiones Sphærarum, necnon Sphæroidearum, & Conoidearum figurarum, eſſe in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum? Præ huius comparatione, quod in his duabus tantum Propoſitionibus edocemur; omnes .n. ſimiles figuras planas in Prop. 15. & omnes ſolidas in ſubſequenti Propoſ. 17. comprehendimus, quod mehercle conſideratione dignum videtur.

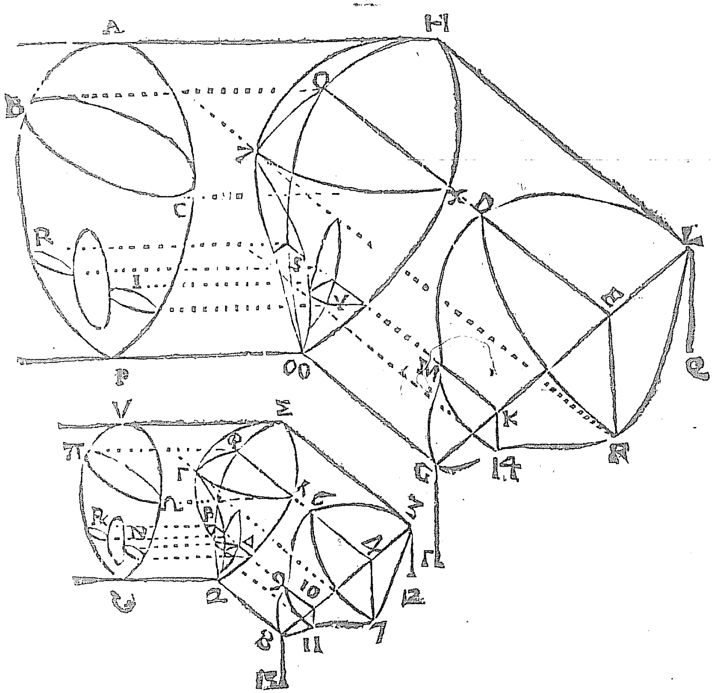
THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

Omnia ſimilia ſolida ſunt in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum, quę ſunt in eorundem homologis figuris.

A. DEMONSTRATIONIS SECTIO I.

Sint duo vtcunq; ſimilia ſolida, V &, A P. Dico hæc eſſe in tripla ratione linearum, ſiue laterum homologorum, quæ ſunt in eorundem homologis figuris. Quia ergo dicta ſolida ſunt ſimilia, poterunt duci duo plana oppoſita tangentia in vnoquoque propoſitorum ſolidorum (quæ in ſolido, A P, repræſententur per ipſas, A H, P ꝏ, & in ſolido, V&, per ipſas, V Σ, & 2,) homologis eorundem figuris æquidiſtantia, inter quæ etiam ducibilia erunt alia duo plana æqualiter ad ipſa, & ad eandem partem inclinata, in quibus iacebunt figu- Coroll. 1. lib. 1. Defin. 11. lib. 1.

figuræ, quæ erunt dictorum ſimilium ſolidorum, & tangentium oppoſitorum, figuræ incidentes, ſint igitur talia duo plana, quorum, & oppoſitorum planorum tangentium in ſolido, A P, communes ſectiones, H L, O O, G, & ſolidi, V &, Σ 3, 2 8, in his autem pla-
Defin. 11. lib. 1. nis ſint eorum incidentes figuræ, H oo, Σ 2, iſtæ igitur erunt figuræ ſimiles, & tangentur à dictis communibus ſectionibus, quæ erunt li-
B. Def. 10. lib. 1. nearum homologarum earundem etiam regulæ, ſint earum inciden-

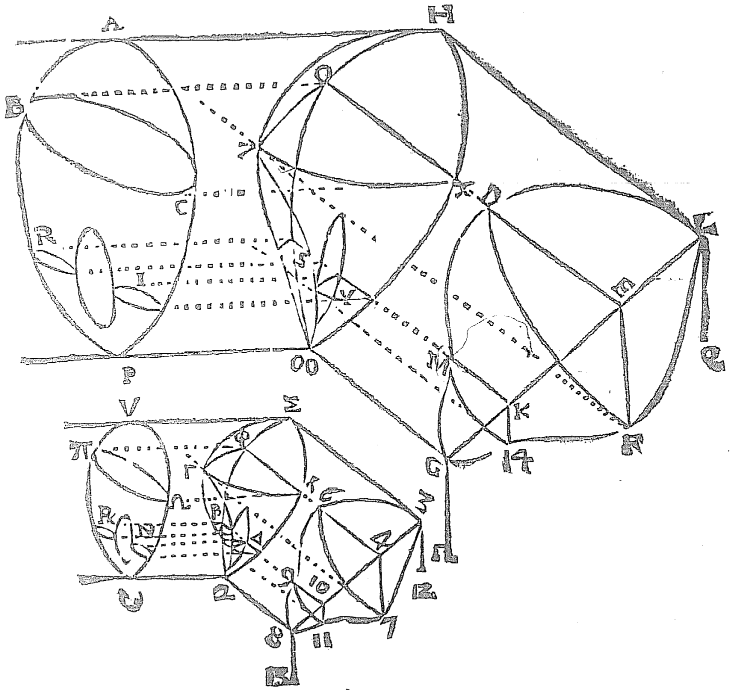


es vtcunque inter eaſdem ductæ, L G, 3 8, & extendantur inter dicta oppoſita tangentia vtcunque plana eiſdem æquidiſtantia, altitudines propoſitorum ſolidorum reſpectu dictorum tangentium ſumptas ſimiliter ad eandem partem diuidentia, ſit igitur vnius ductorum planorum concepta in ſolido, A P, figura, B C, eiuſdem autem, & figuræ, H oo, communis ſectio, O X, quod etiam ſecet incidentem figuræ, H oo, quæ eſt, L G, in, E; pariter alterius plani concepta in ſolido, V &, figura ſit, Π Ω, idem verò planum ſecet figuram, Σ 2, in re-

in recta, Φ Λ, & incidentem eiuſdem figuræ, nempè ipſam, 3 8, in puncto, 4, igitur figuræ, B C, Π Ω, erunt duæ figurarum homolo- Defin. 11. huius.
garum ſolidorum, A P, V &, &, O X, Φ Λ, earum incidentes, &, L G, 3 8, erunt ſimiliter diuiſæ in punctis, E, 4, nam etiam altitudines propoſitorum ſimilium ſolidorum ſunt ſimiliter diuiſæ (ad eandem partem ſub intellige) 17. Vndec. Elem.
ſi igitur à punctis, O, Φ, duxerimus tangentes figuras, B C, Π Ω, erunt iſtæ regulis homologarum earundem figurarum parallelæ, vel pro regulis aliarum etiam aſſumi poterunt, & quę à punctis, X, Λ, ducentur prędictis parallelę occurrent eiſdem figuris, & illas ex oppoſito prędictarum contingent, ita vt habeamus (ſi & iſtæ ductæ intelligantur, quæ ſint, X C, Λ Ω,) oppoſitas tangentes figuræ, B C, quæ erunt, B O, C X, & figuræ, Π Ω, quæ erunt, Π Φ, Ω Λ, necnon pro regulis homologarum earundem haberi poterunt; vel igitur figuræ, B C, Π Ω, adiacent ſuis incidentibus, O X, Φ Λ, totę ad eandem partem, & interius integrę exiſtentes, vel non, ſi ſic factum erit, quod volumus, ſi non transferantur omnes lineæ figurarum, B C, Π Ω, regulis eiſdem tangentibus, in Vide A.
figuras ipſis, O X, Φ Λ, adiacentes, pro vt in Prop. 15. effectum eſt; 15. huius
hinc autem reſultantes figurę ſint, O Z X, Φ Γ Λ, quę per talem con- propè fin.
ſtructionem ad eandem partem incidentium, & interius integrę nobis proueniunt. Similiter ſi intelligamus ducta alia duo plana prędictis ęquidiſtantia, quę ſolida propoſita ita ſecent, vt fiant in ipſis non vnica in ſingulis figura, ſed plures, ex. gr. in ſolido, A P, figurę, R, I, & in, V &, figuræ, ℞, N, eadem autem ſecent figuras incidentes in rectis, S Y, B Δ, & rectas, L G, 3 8, in punctis, K, 10, dummodò hæc plana pariter ſecent altitudines dictas propoſitorum ſolidorum ſimiliter ad eandem partem, erunt figurę, R, I, binę ſimiles, &
ſimiliter poſitę, ac figurę, ℞, N, ſ. I, ſimilis ipſi, N, &, R, ipſi, ℞, & E. Def. 10. lib. 1.
linearum homologarum earundem regulæ ipſis, C X, Ω Λ, æquidiſtabunt, ipſę autem rectę, S, Y; β, Δ, erunt earundem incidentes, vt, S, β, ipſarum, R, ℞, &, Y, Δ, ipſarum, I, N, ſi igitur figurę, R, I, ℞, N, non adiacent ſuis incidentibus, transferantur ſingularum omnes lineę, regula ſemper, pro figuris, R I, ipſa, C X, & pro Vide ad
figuris, ℞, N, ipſa, Ω Λ, in figuras adiacentes lineis homologis figu- fig. A.
rarum, H oo, Σ 2, vt ſint nobis inuentæ figuræ, S, Y, β, Δ, quæ Prop. 15.
adiaceant homologis lineis figurarum incidentium, H, oo, Σ 2: Si huius.
igitur eandem methodum ſeruemus in cæteris figuris, quæ ex ſectione planorum tangentibus æquidiſtantium in dictis ſolidis producuntur, transferentes nempè omnes earum lineas homologas, regulis ſemper ipſis, C X, Ω Λ, in figuras adiacentes lineis homologis figurarum incidentium, H, oo, Σ 2, quę reperientur totę ad eandem partem, & interius integrę, tandem nobis erunt comparata duo ſolida,

quæ

quæ prædictis similibus solidis æquabuntur ea nempè , quorum om-
nes prædictæ adiacentes figuræ erunt omnia plana , nam hæ omnes
adiacentes erunt æquales omnibus homologis figuris dictorum simi-
3. huius. lium solidorum, quarum omnes lineç in ipsas figuras adiacentes mo-
dò dicto translatę sunt , sint hęc solida , H Z , oo , Σ Γ 2 , igitur , A P,
Defin. 11. erit æquale ipsi , H Z oo , & , V & , ipsi , Σ 2 . Sed & hæc solida , H
lib. 1. Z oo , Σ Γ 2 , erunt inter se similia , nam figurę planę in eisdem captę,



æquidistantes dictis tangentibus planis, & altitudines respectu dicto-
rum tangentium sumptas similiter, & ad eandem partem diuidentes,
sunt inter se similes , & in ipsis linearum homologarum regulæ om-
nes vni cuidam æquidistant , illi nempè , qua regula translationes fa-
ctæ sunt , & earundem figurarum similium , incidentes sunt lineę ho-
mologæ duarum planarum similium figurarum , nempè , H oo , Σ 2,
æqualiter ad figuras adiacentes, & ad eandem partem inclinatarum,
quarum regulæ sunt communes sectiones oppositorum tangentium
pla-

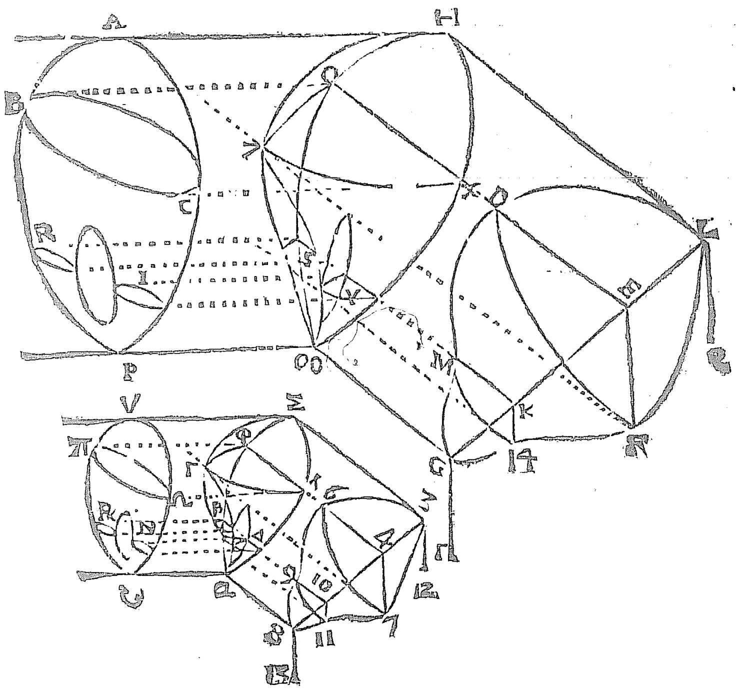
planorum , necnon planorum earundem figurarum incidentium ,
nempè , H L , 3 Σ , quod serua .

B. SECTIO II.

NVnc quia figuræ iam dictæ adiacentes homologis lineis figura-
rum , H oo , Σ 2 , plurificari possunt , quę sunt in eodem plano,
vti apparet in figuris , S , Y , β , Δ , quę cum sint in eodem plano sunt
tamen duæ figuræ , ideò vt ex duobus fiat vna tantum , adhuc om-
nium linearum harum adiacentium figurarum aliam translationem
regulis , H L , Σ 3 , faciemus ; ducantur ergo per ipsas , L G , 3 8 , duo
plana , quorum & oppositorum planorum tangentium communes
sectiones sint ipsæ , 3 12 , 8 13 , L Q , G T , cum ipsis , 3 Σ , 8 2 , L H,
G oo , angulos æquales continentęs , & agantur duę ex opposito tan-
gentes figuras , O Z X , Φ Γ Λ , parallelę ipsis , O X , Φ Λ , quę sint ip-
sæ , Z F , Γ 7 , productæ cum reliquis tangentibus oppositis , O X , Φ
Λ , donec occurrant planis , L T , 3 13 , vt in punctis , E , F ; 4 , 7 , iun-
ctis rectis lineis , E F , 4 7 . Quia ergo , D E , ęquidistat ipsi , oo G , &, 16. Vnd.
E F , ipsi , G T , angulus , D E F , æquatur angulo , oo G T , & eadem Elem.
ratione angulus , 6 4 7 , probabitur æqualis ipsi , 2 8 13 , vnde , quia,
oo G T , æquatur ipsi , 2 8 13 , angulus , F E D , erit æqualis angulo,
7 4 6 , & cum sit , vt , O X , ad , Φ Λ , vel vt , O E , ad , Φ 4 , quia , L
G , 3 8 , sunt lineæ incidentes similium planarum figurarum , H oo , Corollar.
Σ 2 , vel vt , X E , ad , Λ 4 , ita , E F , ad , 4 7 , sint autem , X E , Λ 4 , 24. lib. 1.
comprehensæ inter easdem extremitates rectarum , E F , 4 7 , & peri-
metrum figurarum , O Z X , Φ Γ Λ , easdem tangentes , ergo , E F , 4
7 , erunt incidentes similium figurarum , O Z X , Φ Γ Λ , & opposita-
rum tangentium , O E , Z F ; Φ 4 , Γ 7 . Similiter si sic producantur 24. lib. 1.
oppositæ tangentes figurarum , S , Y ; β Δ , quarum duæ incidant ip-
sis , L G , 3 8 , vt in , K , 10 , reliquæ verò in punctis , 11 14 , planis , L
T , 3 13 , occurrant , iunctis , K 14 , 10 11 , ostendemus pariter ipsas , K
14 , 10 11 , esse incidentes similium figurarum , Y , Δ , vel similium , S,
β , & oppositarum tangentium extremarum , quæ ad puncta , K 14,
& , 10 , 11 , terminantur . Si igitur transferamus omnes lineas tum fi- Vide ad
gurarum , S , Y , tum , β , Δ , regulis eisdem tangentibus , vel semper finem A.
regulis ipsis , O E , Φ 4 , prius compositis illis , quę sibi in directum e- p. 15. hu-
runt , tum in figuris , S , Y , tum , β Δ , vt ex illis fiat vnica composita ius.
recta linea , prędictis in directum posita in figura adiacente , qualis sit,
9 10 , æqualis .s. compositæ ex his , quibus adiacent figuræ , β Δ , &,
M K , æqualis compositæ ex his , quibus adiacent figuræ , S , Y ; tan-
dem habebimus figuras adiacentes ipsis incidentibus .s. M K 14 , 9 10
11 , in quibus plures figuræ , S , Y , in vnam , M K 14 , & β , Δ , in v-

nam,

nam, 9 10 11, collectę erunt. Si igitur hoc fiat in cęteris figuris, quę in solidis, H Z oo, Σ Γ 2, ipsis tangentibus planis æquidistant, tandem habebimus duo solida, quæ sint, L D F G, 3 6 8 7, æqualia duobus solidis, H Z oo, Σ Γ 2, seu duobus, A P, V &, L D G F, nempè ipsi, A P, &, 3 6 8 7, ipsi, V &, nam omnia eorum plana, regulis oppositis tangentibus planis, sunt inter se æqualia ex constructione. Sed & hæc solida, L D G F, 3 6 8 7, dico esse inter se similia; Cum .n.



præfatis oppositis tangentibus planis (quæ sunt etiam opposita tan-
gentia plana solidorum, L D G F, 3 6 8 7,) incidant quoq; duo pla-
26. lib. 1. na, L T, 3, 13, ad eundem angulum ex eadem parte (sunt .n. prima
plana, H G, Σ 8, oppositis tangentibus planis æquè, & ad eandem
partem, inclinata, & anguli, T G oo, 13 8 2, æquales inter se, nec-
non anguli, L G oo, 3 8 2, vnde etiam secunda plana ad eadem tan-
26. lib. 1. gentia plana sunt ad eundem angulum ex eadem parte. Sint verò
figuræ ex planis inclinata oppositis tangentibus parallelis, altitudi-
nes-

nesque ipsorum solidorum, L D G F, 3 6 8 7, similiter ad eandem partem diuidentibus, conceptę (vt probatum est) inter se similes, vt ipsæ, D E F, 6 4 7, necnon, M K 14, 9 10 11, & omnium earundem linearum homologarum regulæ duabus quibusdam, nempę ipsis, O E, Φ 4, æquidistantęs, & earum incidentes ipsæ, E F, 4 7, necnon, K 14, 10 11, quę omnes incidentes iacent in plano similium figurarum, L F G, 3 7 8, & sunt earum homologæ, æquidistantes ipsis, L Q, 3 12, communibus sectionibus planorum incidentium figurarum, L F G, 3 7 8, & oppositorum tangentium, quarum quidem figurarum 26. lib. 1.
plana sunt ad plana tangentia, vt dictum est, æquè ad eandem partem inclinata, & cum ipsæ, inquam, figuræ, L F G, 3 7 8, sint similes inter se, nam ex. g. est, E F, ad, 4 7, vt, O E, ad, Φ 4, idest A. Def. 10. lib. 1.
vt, L G, ad, 3 8, quæ diuidunt similiter ad eandem partem ipsas, L G, 3 8, (quod etiam de cæteris probabitur) & cum anguli, L G T, 26. lib. 1.
3 8 13, sint etiam æquales superius dictis consequenter, & ijs, quæ lib. 1. Prop. 26. ostensa sunt, ideò, inquam, & ipsæ figuræ, L F G, Defin. 11. lib. 1.
3 7 8, & ipsa solida, L D G F, 3 6 8 7, pariter similia erunt.

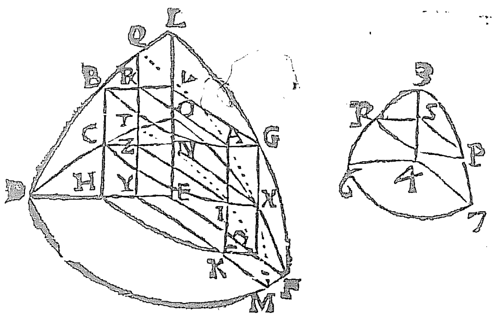
Nunc solidum, 3 6 7 8, planis, oppositis tangentibus parallelis, in talia frusta diuisum intelligatur, vt quæ in ipsis ducuntur rectæ lineę ipsi, 3 8, æquidistantes, in eisdem frustis singulę integrę habeantur .i. ita vt ductarum sic linearum, quæ ad frustorum ambientem superficiem terminantur, pars quidem non sit intra frusta, pars verò extra, sed totæ intra, vel saltem nihil earum extra reperiatur, hanc etenim sectionem supponere fieri posse nullam inuoluit repugnantiam, cum hoc totum solidum ex duabus linearum translationibus resultans sit interius integrum, enim verò si præfatum solidum in frusta quæcunque per dicta plana parallela scinderetur, nec in ipsis contingeret, quod attentamus, denuò facta frusta planis prædictis parallelis continuò resecaremus, vt tandem omnis linearum, ipsi, 3 8, æquidistanter in dictis frustis ducibilium, fractura tolleretur: Esto igitur, quod hoc obtinuerimus per duo plana, 9 10 11, 6 4 7, oppositis planis tangentibus parallela, quibus solidum, 3 6 7 8, in tria frusta, 3 6 4 7, 6 11, &, 9 10 11 8, sectum habeatur eius rationis, qualem diximus, in his ergo singulis frustis ductæ quæcunque ipsi, 3 8, æquidistantes, & ad eorum superficiem terminatæ, integræ habebuntur. Sit vlterius in alio solido, L D F G, diuisa, L G, similiter ac, 3 8, in punctis, E, K, per quæ transeant plana, D E F, M K 14, oppositis planis tangentibus parallela, quibus solidum, L D F G, in tria frusta scindatur, L D E F, D 14, M K 14 G, erunt ergo etiam hęc frusta eius rationis, qualem cupimus .i. omnes ductę ipsi, L G, æquidistantes, in ipsis frustis conceptæ, integræ erunt; quod ex eorum similitudine facilè ostendi potest, si enim aliqua ex. gr. in frusto, L D E F,

S 2 ducta-

ductarum sic linearum fracta per superficiem ambientem inueniri posset, etiam illi homologa in frusto, 3647, fracta esse deberet, quod est absurdum, nullam .n. ducibilium ipsi, 3 8, in solido, 3 6 7 8, ęquidistanter linearum fractam esse iam ex constructione manifestum est, frusta autem, 3 6 4 7, L D E F, esse inter se similia, sicut etiam, 6 11, D 14, necnon, 9 10 11 8, M K 14 G, ex diffinitione similium solidorum liquidò apparet.

D. SECTIO IV.

EX his frustis autem duo accipiamus, quę simul cum homologis partibus ipsarum, L G, 3 8, detruncantur, vt ipsa, L D E F, 3 6 4 7, & ponamus eadem seorsim, deinde ex maiori ipsarum, L E, 3 4, vt ex, L E, abscindatur æquali minori .s. O E, æqualis ipsi, 3 4, hoc facto intelligamus singulas, quæ tum in figura, L D E, tum in figura, L F E, ipsi, L E, æquidistant, & sunt ex iam dictis totæ interius integræ similiter, & ad eandem partem diuidi, ac secatur, LE, in, O, & per dictas sectiones extensas lineas, OD, OF, vlterius secto solido, L D E F, plano vtcunq; ipsi, L F E, æquidistante, quod in eo producat figuram, Q M Y, & in figura, L D E, rectam, Q Y, in figura verò, D E F, rectam, Y M, & in superficie, L D F, lineam, Q A M, intelligantur singulæ in figura, Q Y M, parallelæ ipsi, Q Y, similiter, & ad eandem partem diuidi, ac secatur, QY, in, T, & per ipsas sectiones concipiatur extensa linea, T I M; sic autem fiat in cæteris figuris, quę in solido, L D E F, ipsi, L E F, æquidistant, inuentis lineis, qualis est ipsa, T I M, quorum termini erunt in lineis, D T O, D M F, per easdem autem lineas sic se habentes intelligamus extensam superficiem, cuius termini erunt lineæ, D O, O F, F D, vt habeamus solidum, O D E F, figuris, O D E, O E F, D E F, & superficie, D O F, comprehensum. Quoniam ergo linea, O F, diuidit omnes ipsi, L E, in figura, L E F, æquidistantes similiter ad eandem partem, ac diuiditur, L E, in, O,



in, O,

in, O, ideò, vt vna ad vnam, sic omnes ad omnes .i. vt, L E, ad, E O, sic omnes lineæ figuræ, L E F, erunt ad omnes lineas figuræ, O E F, regula, L E, .i. vt, L E, ad, E O, ita figura, L E F, ad figuram, O E F; eodem modo ostendemus, vt, Q Y, ad, Y T, sic esse figuram, Q Y M, ad figuram, T Y M, est autem vt, Q Y, ad, Y T, ita, L E, ad, E O, ergo figura, L E F, ad, O E F, erit vt, Q Y M, ad, T Y M, & sic erit quælibet alia figura in solido, L E D F, ipsi, L E F, æquidistans, ad eius portionem in solido, O E D F, manentem, ergo vt vna ad vnam, sic omnes ad omnes .i. vt figura, L E F, ad figuram, O E F, sic omnia plana solidi, L E D F, ad omnia plana solidi, O E D F, regula plano, L E F, & ita solidum, L E D F, ad solidum, O E D F, est autem figura, L E F, ad figuram, O E F, vt, L E, ad, E O, vel ad, 3 4, ergo solidum, L E D F, ad solidum, O E D F, erit vt, L E, ad, 3 4, quod pariter serua.

Coroll. 4. huius.

4. huius.

4. huius.

3. huius.

E. SECTIO V.

DVcatur nunc intra solidum, O E D F, planum ipsi, D E F, æquidistans, quod in eo producat figuram, C N X, quæ secet figuram, O D E, in recta, C N, &, O F E, in recta, N X, & superficiem, O D F, in linea, C X, secet autem & lineas, D O, in, C, O E, in, N, &, O F, in, X, similiter in solido, 3 4 6 7, ducatur planum ipsi, 6 4 7, æquidistans, quod ab ipsa, 3 4, abscindat, 3 5, æqualem ipsi, O N, & producat in eo figuram, R S P; vlterius per puncta, C, X, ducantur, B H, G Ω, parallelę ipsi, L E, & occurrentes lineis, D L, L F, in, B, G, & rectis, D E, E F, in, H, Ω, deinde à puncto, B, ducatur, B V, parallela ipsi, D E, siue, C N, (nam, D E, C N, sunt communes sectiones planorum æquidistantium, C N X, D E F, & plani, O D E, eadem secantis, vnde, C N, D E, sunt parallelæ, veluti patebit etiam, N X, æquidistare ipsi, E F,) & iungatur, V G, quia ergo, N X, est parallela ipsi, E Ω, &, X Ω, ipsi, N E, erit, X Ω, æqualis ipsi, N E, & quia, L E, ad, E O, est vt, B H, ad, H G, .i. vt, V E, ad, E N, est autem, G Ω, ad, Ω X, vt, L E, ad, E O, quia est illi parallela, & secatur à linea, O F, in, X, ergo, G Ω, ad, Ω X, erit vt, V E, ad, E N, sunt autem, Ω X, E N, inter se æquales, ergo &, G Ω, V E, erunt æquales, & sunt parallelæ, ergo etiam eas iungentes, V G, E Ω, erunt æquales, & parallelæ. Sumatur nunc intra lineam, C X, vtcunq; punctum, I, per quod ipsi, L E, parallela ducatur, A K, quæ superficiei, L D F, occurrat in, A, & plano, D E F, in, K, quia ergo, A K, æquidistat ipsi, L E, poterit per, A K, planum duci æquidistans plano, L E F, sit ductum idem, quod prius, quod adhuc secet figura, L D E, in recta,

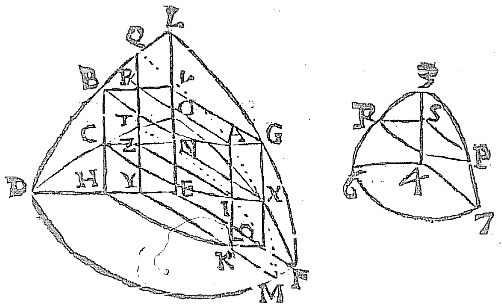
Ex 15. 11. Elem.

QY,

QY, DEF, in recta, YM, superficiem, LDF, in linea, QM, superficiem, ODF, in linea, TM, & figuram, CNX, in recta, ZI, secet autem, QY, ipsam, BV, in puncto, ℞, & iungatur, A℞, erit ergo, ZI, ipsi, YK, æquidistans, est autem etiam, AK, æquidistans ipsi, QY, ergo, YI, erit parallelogrammum, & ideò, IK, erit æqualis ipsi, ZY, & quia, AK, ad, KI, est vt, QY, ad, YT, .i. vt, BH, ad, HC, .i. vt, ℞Y, ad, YZ, erit, AK, ad, KI, vt, ℞Y, ad, YZ, sunt verò, IK, ZY, æquales, ergo &, AK, ℞Y, erunt æquales, & sunt parallelæ, quia ambo sunt parallelæ eidem, LE, ergo eas iungentes, quæ sunt, ℞A, YK, erunt æquales, & parallelę, est autem, YK, parallela ipsi, EΩ, &, EΩ, ipsi, VG, ergo, ℞A, erit parallela ipsi, VG. Similiter autē procedemus in reliquis, quę per puncta lineę, CX, ipsi, LE, ducuntur æquidistantes, donec occurrant superficiei, LDF, & plano, DEF, harum autem patet nihil extra superficiem, LDF, manere, ex iam dictis, sint ergo omnium earum termini ex vna parte in linea, BAG, ex alia in linea, HKΩ, veluti ergo ostensum est, A℞, esse parallelam ipsi, GV, sic ostendemus reliquas, quę iungunt puncta, quibus iam ductæ occurrunt lineæ, BG, cum punctis, in quibus plana per dictas lineas ducta, ipsi, LEF, æquidistantia, secant ipsam, BV, esse ipsi, VG, parallelas ergo omnes erunt in eodem plano, in eo scilicet quod transit per, BV, VG, omnes .n. dictæ parallelæ transeunt per puncta rectæ lineæ, BV, sunt igitur dicta occursuum puncta, & in superficie, LDF, & in plano, BVG, erunt ergo in eorum communi sectione, linea ergo, BAG, est communis sectio plani per, BV, VG, transeuntis, & superficiei, LDF; habemus ergo solidum, BΩ, in cuius ambiente superficie sunt duæ figuræ planæ inuicem parallelæ, BVG, HEΩ, in quarum circuitu sumptis vtcunque duobus punctis, V, E, & iuncta, VE, cæteræ iungentes quælibet aliæ duo puncta earundem circuitus eidem semper, VE, parallelę repertæ sunt æquales, ergo, BΩ, erit cylindricus, cuius oppositæ bases ipsæ, BVG, HEΩ, hoc autem secatur plano eidem oppositis basibus

Per cōstructionem.

Def. Cylindrici conformiter.



sibus æquidistante, eo nempè, quod producit figuram, CNX, ergo, CNX, erit æqualis ipsi, BVG, quod cum alijs adhuc serua.

Corol. 12. lib. 1.

F. SECTIO VI.

QVia verò, LE, ad, EO, est vt, BH, ad, HC, .s. vt, VE, ad, EN, permutando, & diuidendo, LV, ad, VE, erit vt, ON, ad, NE, .i. vt, 35, ad, 54, ergo, LE, 34, sunt similiter ad eandem partem diuisæ à figuris, BVG, RSP, ergo sunt ipsæ figuræ inter se similes, quarum latera homologa ipsæ, VG, SP, lineæ homologę figurarum similium, LFE, 374, quarum incidentes sunt ipsę, LE, 34, vnde est, EF, ad, 47, vt, LE, ad, 34, .s. vt, VG, ad, SP, sunt verò figuræ, DEF, 647, quia similes, in dupla ratione ipsarum, EF, 47, & ipsæ, BVG, RSP, in dupla ratione ipsarum, VG, SP, ergo vt figura, DEF, ad figuram, 647, ita erit figura, BVG, vel, CNX, eidem æqualis ad figuram, RSP, Quoniam verò solida, LEDF, 3647, sunt similia, vt facilè ostendi potest, & eorum figuræ incidentes, & oppositorum planorum tangentium (quorum ex vna parte duo sunt ipsa, 647, DEF,) sunt figuræ, LEF, 347 quarum lineæ incidentes, LE, 34, ideò plana ipsis, DEF, 647, æquidistantia, quæ similiter ad eandem partem diuidunt incidentes, LE, 34, diuidunt etiam altitudines dictorum solidorum respectu dictorum tangentium sumptas similiter ad eandem partem (hoc dico quotiescunque, non contingat, LE, 34, esse perpendiculares ipsis, DEF, 647, tunc enim fiunt eædem incidentes altitudines dictorum solidorum) cum igitur, vt, LE, ad, 34, .i. ad, EO, ita sit altitudo solidi, LEDF, tum ad abscissam altitudinem per planum tangens in, O, ipsi, DEF, æquidistans .i. ad altitudinem solidi, OEDF, tum ad altitudinem solidi, 3467, ideò solida, OEDF, 347, erunt in eadem altitudine sumpta respectu basium, DEF, 647, & plana ipsis basibus æquidistantia partes æquales ab ipsis, OE, 34, abscindentia, etiam ab eorum altitudinibus abscindent partes æquales, ostendimus autem figuras, quę ab ipsis, OE, 34, abscindunt partes æquales, esse proportionales, ergo in solidis, OEDF, 3467, in eadem altitudine existentibus sumpta respectu basium, DEF, 647, figuræ, quę ab eisdem altitudinibus vtcunque abscindunt partes æquales, sunt semper, vt ipsæ bases, ergo vt vna ad vnam, sic omnes ad omnes, & sic solida ad solida .s. vt basis, DEF, ad basim, 647, ita erit solidum, OEDF, ad solidum, 3467, est autem, DEF, ad, 647, in ratione dupla eius, quam habet, EF, ad, 47, .i. in ratione composita ex duabus rationibus ipsius, EF, ad, 47, vel ipsius, LE, ad, 34, ergo solidum, ODE

F, ad

Ex diffin. similium solid.

Ex antec.

17. Vnd. Elem.

4. huius.

Ex antec.

Defin. 12. lib. 1.

F, ad ſolidum, 3 4 6 7, habebit rationem compoſitam ex duabus rationibus ipſius, L E, ad, 3 4, quod etiam ſerua.

G. SECTIO VII.

SI igitur inter ſolida, L E D F, 3 4 6 7, medium ſumamus ſolidum, O E D F, habebit ſolidum, L E D F, ad ſolidum, 3 4 6 7, rationem compoſitam ex ratione ſolidi, L E D F, ad ſolidum, O E D F, .i. ex ratione ipſius, L E, ad, 3 4, & ex ratione ſolidi, O E D F, ad ſolidum, 3 4 6 7, .i. compoſitam ex duabus rationibus ipſius, L E, ad, 3 4, igitur ſolidum, L E D F, ad ſolidum, 3 4 6 7, habebit rationem compoſitam ex tribus rationibus ipſius, L E, ad, 3 4, .i. triplam rationem habebit eius, quam habet, L E, ad, 3 4, quia verò, L E, 3 4, ſunt homologæ partes integrarum incidentium, L G, 3 8, quæ ſunt in prima huius Propoſ. figura, ideò his fruſtis ibidem conſpectis iam oſtenſum erit fruſtum, L E D F, ad fruſtum, 3 4 6 7, triplam rationem habere eius, quam habet, L E, ad, 3 4, idest, L G, ad, 3 8.

Defin. 12. lib. 1.

Def. Vnd. 9. Elem.

H. SECTIO VIII. ET VLTIMA.

EOdem modo ſumptis alijs duobus fruſtis, D 14, 6 11, oſtendemus eadem habere triplam rationem duarum, L G, 3 8, & ſimiliter reliqua fruſta pariter triplam rationem habere duarum, L G, 3 8, & vt vnum ad vnum, ſic omnia ad omnia .i. vt fruſtum, L E D F, ad fruſtum, 3 4 6 7, ita eſſe omnia fruſta ſolidi, L G, ad omnia fruſta ſolidi, 3 8, ſed fruſtum, L E D F, ad fruſtum, 3 4 6 7, triplam rationem habere oſtenſum eſt eius, quam habet, L G, ad, 3 8, ergo ſolidum, L G, ad ſolidum, 3 8, triplam rationem habebit eius, quam habet, L G, ad, 3 8, eſt autem ſolidum, L G, æquale ſolido, A P, &, 3 8, ipſi, V &, ergo ſolidum, A P, ad, V &, triplam rationem habebit eius, quam, L G, ad, 3 8, quia verò, L G, 3 8, ſunt incidentes ſimilium planarum figurarum, H oo, Σ 2, & oppoſitarum tangentium, H L, oo G, Σ 3, 2 8, ideò, vt, L G, ad, 3 8, ita erunt lineæ homologæ figurarum, H oo, Σ 2, ſumptæ regulas, H L, Σ 3, ex. gr. ita, O X, ad, Φ Λ, iſtæ verò ſunt incidentes ſimilium figurarum, B C, Π Ω, & oppoſitarum tangentium, B O, C X, Π Φ, Ω Λ, ideò, vt ipſæ, O X, Φ Λ, ita erunt quælibet homologæ figurarum, B C, Π Ω, ſumptę regulis ipſis, C X, Ω Λ, at ſolidum, A P, ad, V &, triplam rationem habet eius, quam, L G, ad, 3 8, ergo etiam triplam rationem habebit eius, quam, O X, ad, Φ Λ, & conſequenter etiam triplam rationem eius, quam habebit quælibet in figura, B C, ipſi,

12. Quin. Elem.

B. Huius Propoſ.

Ex diffin. linearum incident.

Vt patet in A. huius.

ipſi, C X, æquidiſtans ad ſibi homologam in figura, Π Ω, ipſi, Ω Λ, æquidiſtantem, vel quælibet in quacunque figurarum ipſi, B C, in ſolido, A P, æquidiſtantium, ad ſibi homologam in ſolido, V &. Igitur ſimilia ſolida ſunt in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum, quæ ſunt in eorundem homologis figuris, quod nobis oſtendendum erat.

COROLLARIVM I.

ET quia iam dicta ſimilia ſolida oſtenſa ſunt eſſe in tripla ratione linearum homologarum, quæ ſunt in homologis figuris, æquidiſtantibus oppoſitis planis tangentibus vtcunque ſumptis, ideò clarum eſt eadem ſimilia ſolida eſſe in tripla ratione quarumuis homologarum in ipſis ſolidis deſcriptibilium, & duas quaſuis homologas ſumptas iuxta quædam oppoſita tangentia plana, eſſe vt duas quaſuis homologas ſumptas iuxta alia oppoſita tangentia plana.

COROLLARIVM II.

VNiuersè inſuper habetur, ſi fuerint quatuor rectæ lineæ deinceps proportionales, vt prima ad quartam, ita eſſe ſolidum deſcriptum à prima ad ſolidum illi ſimile deſcriptum à ſecunda, & huius conuerſum; dummodò deſcribentes ſint lineæ, vel latera homologa ſimilium figurarum, quæ in ipſis homologæ vocantur.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

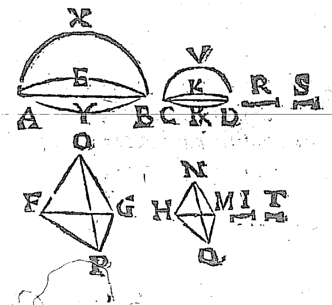
SI quatuor rectę lineę proportionales fuerint, ſolidum deſcriptum à prima ad ſolidum ſibi ſimile deſcriptum à ſecunda, erit, vt ſolidum deſcriptum à tertia ad ſibi ſimile deſcriptum à quarta. Et ſi fuerint quatuor ſolida proportionalia, quorum quæ ſunt eiuſdem proportionis termini ſint ſimilia, eadem deſcribentia erunt proportionalia; dummodò tamen ſemper deſcribentia ſint vel lineæ, vel latera homologa figurarum, quæ in ipſis homologæ vocantur.

Sint ergo quatuor rectę lineę proportionales, A B, C D, F G, H M, & ſint ab ipſis, A B, C D, deſcripta ſimilia ſolida, A X B, C V D, & ab, F G, H M, ſimilia ſolida, O F P G, N H Q M, ita vt duæ, A B, C D, ſint homologę figurarum, A E B Y, D K C R, &

FG, HM, homologæ figurarum, FGP, HMQ, quę figurę vocantur in ipsis solidis homologæ. Dico hæc solida esse proportionalia; sit duarum, AB, CD, tertia proportionalis, R, quarta, S, & duarum, FG, HM, tertia, I, quarta, T, est igitur solidum, AXB, ad, CVD, vt, AB, ad, S, .i. vt, FG, ad, T, (quia vt, AB, ad, CD, ita est, FG, ad, HM,) .i. vt solidum, FOGP, ad, HNMQ, quod est propositum.

Ex Corol. 2. antec.

Sit nunc solidum, AXB, ad sibi simile, CVD, vt, FOGP, ad sibi simile, HNMQ, & sint eadem describentes, AB, CD, lineæ, vel latera homologa figurarum homologarum, AEBY, CKDR, &, FG, HM, duo postrema describentes sint lineæ, vel latera homologa figurarum homologarum, FGP, HMQ. Dico has esse proportionales; sint adhuc duarum, AB, CD, tertia proportionalis, R, quarta, S, & duarum, FG, HM, tertia, I, quarta, T, quia ergo solida, AXB, CVD, sunt similia erit, AXB, ad, CVD, vt, AB, ad, S, &, FOGP, ad, HNMP, vt, FG, ad, T, sunt autem hæc quatuor solida proportionalia, ergo &, AB, ad, S, erit vt, FG, ad, T, ergo, AB, ad, CD, erit vt, FG, ad, HM, quod ostendendum erat.

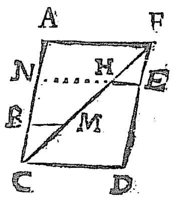


Ex Corol. 2. antec.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

SI in parallelogrammo diameter ducta fuerit, parallelogrammum duplum est cuiusuis triangulorum per ipsam diametrum constitutorum.

Sit parallelogrammum vtcunque, AD, in quo ducta diameter, FC, ipsum diuidat in triangula, FAC, CDF. Dico parallelogrammum, AD, duplum esse cuiusuis triangulorum, FAC, CDF; abscindantur ab, FD, CA, versus puncta, F, C, partes æquales, FE, CB, & per puncta, B, E, parallelæ ipsi basi, CD, ducantur, EH, BM, incidentes diametro, FC, in punctis, H, M; quoniam ergo in triangulis, FHE, C



B M,

BM, angulus, HFE, æqualis est angulo illi coalterno, BCM, &, HEF, ipsi, FDC, qui est æqualis angulo illi opposito, FAC, qui tandem æquatur angulo, MBC; interior exteriori, ideò angulus, FEH, æquatur angulo, MBC, sunt igitur in triangulis, FEH, MBC, duo anguli duobus angulis æquales, & latera illis adiacentia sunt æqualia, nempè, FE, ipsi, BC, ergo reliqua latera erunt æqualia, .i. HE, ipsi, BM, eodem modo ostendemus de cæteris parallelis ipsi, CD, eas nempè, quæ versus puncta, F, C, abscindunt à lateribus, FD, CA, partes æquales, esse pariter inter se æquales, veluti sunt extremæ, AF, CD, æquales, ergo omnes lineæ trianguli, CAF, æquabuntur omnibus lineis trianguli, FDC, sumptis in vtrisq; omnibus lineis regula, CD, ergo triangulus, ACF, erit æqualis triangulo, FDC, ergo duo trianguli, ACF, FDC, scilicet parallelogrammum, AD, erit duplum cuiusuis triangulorum, ACF, FCD, quod ostendere opus erat.

26. Primi Elem.

3. huius.

COROLLARIVM I.

HInc patet, quæcunq; de parallelogrammis in Prop. 5. 6. 7. & 8. huius Libri ostensa sunt, eadem de triangulis vt vera recipi posse, si in triangulis conditiones ibi oppositæ repertæ fuerint, nam in vnoquoque expositorum triangulorum sumptis duobus quibusuis lateribus, fieri potest sub illis in eodem angulo parallelogrammum, cuius triangulum erit dimidium. Triangula ergo, quæ in eadem sunt altitudine inter se sunt, vt bases: Et quæ in eadem basi inter se sunt, vt altitudines, vel vt latera æqualiter basibus inclinata; Item habent rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, siue laterum æqualiter basibus inclinatorum, cum sunt æquiangulæ: Item triangula, quorum bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocantur sunt æqualia; & quæ sunt æqualia bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas: Et tandem habetur similia triangula esse in dupla ratione laterum homologorum, quæ omnia ex præsenti Propos. pendent.

Iux. diff. 1. Sexti Elem.

COROLLARIVM II.

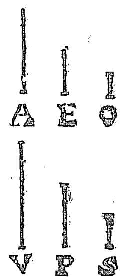
COlligitur in super, si supponamur, CD, esse æqualem ipsi, DF, quamlibet ductam in triangulo, FCD, parallelam ipsi, CD, æqualem esse ei, quam ipsa abscindit ab, FD, versus, F, nempè ipsi abscissæ, FE, & producta, EH, versus, AC, cui incidat in, N, ipsam, HN, æquari residuæ abscissæ, FE, .i. ipsi, ED, &, NE, integram æquari

ipsi

ipsi, F D, quæ est vna maximarum abscissarum ipsius, F D, vnde hæc via colligemus omnes lineas trianguli, F C D, regula, C D, dum latus, F D, æquatur ipsi, D C, esse æquales omnibus abscissis ipsius, F D; & omnes
Defin. 4. huius. lineas trianguli, A F C, esse æquales residuis omnium abscissarum, F D,
Defin. 5. huius. & omnes lineas parallelogrammi, A D, æquari maximis abscissarum,
Defin. 6. huius. F D, quæ dicuntur eiusdem obliqui transitus, si angulus, C D F, non sit rectus, & recti transitus, si sit rectus; vnde sicuti ostendimus, parallelogrammum, A D, duplum esse trianguli, F C D, vel, A C F, & subinde etiam omnes lineas, A D, regula C D, duplas esse omnium linearum
3. huius. trianguli, F C D, vel, A C F, sic etiam vt demonstratum recipi potest propositæ lineæ rectæ, vt ipsius, F D, vtcunque, maximas abscissarum duplas esse omnium abscissarum eiusdem, vel residuarum omnium abscissarum, vnde & omnes abscissas patebit æquari residuis omnium abscissarum eiusdem lineæ, ijs vel recti, vel eiusdem obliqui transitus sumptis, quæ ad sequentium intelligentiam diligenter sunt adnotanda.

LEMMA.

Sit magnitudo, A, ad quotcunque magnitudines, E, O, singillatim ad vnamquamque, vt magnitudo, V, ad tot alias, P, S, singillatim ad vnamquamq; nempè fit, A, ad, E, vt, V, ad, P; A, ad, O, vt, V, ad, S. Dico, A, ad, E, O, simul esse, vt, V, ad, P, S, simul iunctas. Etenim conuertendo erit prima, E, ad secundam, A, vt tertia, P, ad quartam, V, sed etiam
24. Quin. Elem. conuertendo quinta, O, est ad secundam, A, vt sexta, S, ad quartam, V, ergo composita ex prima, E, & quinta, O, erit ad secundam, A, vt composita ex tertia, P, & sexta, S, ad quartam, V, ergo
Defin. 13. huius. conuertendo, A, ad, E O, simul erit, vt, V, ad, P, S, simul iunctas, qui arguendi modus dicitur à me, colligere, seu colligendo.

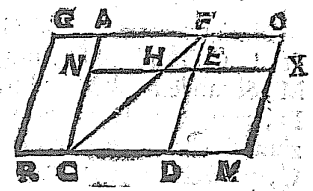


THEOREMA XX. PROPOS. XX.

Assumpta Propos. antecedentis figura, dimissa, B M, retineatur, N E, pro vna ex ductis vtcunque parallela ipsi, C D, producta autem, C D, vtcunque in, M, completoque parallelogrammo, O D. Dico parallelogrammum, A M, ad trapezium, F C M O, esse vt, C M, ad, M D, simul cum $\frac{1}{2}$, C D.

Erit

Erit enim, A M, parallelogrammum, vnde, M A, ad, A D, erit vt, C M, ad, C D, A D, verò ad triangulum, F C D; est vt, C D, ad, $\frac{1}{2}$, C D, ergo, A M, ad triangulum, F C D, erit vt, M C, ad, $\frac{1}{2}$, C D, est autem, A M, ad, F M, vt, C M, ad, M D, ergo, colligendo, A M, ad, F M, cum triangulo, F C D, idest ad trapezium, O F C M, erit vt, C M, ad, M D, cum, $\frac{1}{2}$, D C, quod ostendendum erat. 5. huius. Ex antec. 5. huius.



COROLLARIVM.

Manifestum est autem, si, C D, sit æqualis ipsi, D F, omnes lineas parallelogrammi, A D, regula, C D, esse æquales maximis abscissarum, F D, & omnes lineas trianguli, F C D, regula eadem æquari omnibus abscissis, F D. Nunc si intelligamus cuilibet earum, quæ dicuntur maximæ abscissarum, vel abscissæ, adiungi rectam, D M, vocantur tunc maximæ abscissarum, vel abscissæ adiuncta, D M, hæc autem sunt eædem illis, quæ habentur in parallelogrammo, A M, & trapezio, F C M O, nam si produxeris, N E, vsq; ad, O M, in, X, fiet, E X, adiuncta tum ipsi, N E, vni ex maximis abscissarum, F D, tum ipsi, H E, vni ex omnibus abscissis, F D, & , E X, adiuncta est æqualis ipsi, D M, vnde omnes lineæ, A D, adiuncta, D M, sunt omnes lineæ parallelogrammi, A M, & sunt æquales maximis abscissarum ipsius, F D, adiuncta, D M, & omnes lineæ trianguli, F C D, adiuncta, D M, sunt omnes lineæ trapezij, F C M O, & sunt æquales omnibus abscissis ipsius, F D, adiuncta, D M. Quia ergo, A M, ad trapezium, F C M O, est vt, C M, ad, M D, cum, $\frac{1}{2}$, D C, ideò omnes lineæ, A M, ad omnes lineas trapezij, F C M O, (regulam hic semper intellige ipsam, C M,) .i. maximæ abscissarum, F D, adiuncta, D M, ad omnes abscissas, F D, adiuncta, D M, erunt vt, C M, composita nempè ex proposita linea, C D, siue ex proposita, F D, illi æquali, & adiuncta, D M, ad compositam ex adiuncta, M D, & , $\frac{1}{2}$, propositæ lineæ, C D, vel, D F. Ex Cor. antec. Defin. 7. huius. 3. huius.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

In exposita superioris Propos. figura, si producatur, C D, ad partes, C, vtcunque, vt in, R, & compleatur parallelogrammum, G C, ostendemus trapezium, F G R C, ad tra-

pe-

pezium, F C M O, esse vt composita ex, R C, &, $\frac{1}{2}$, C D, ad compositam ex, M D, &, $\frac{1}{2}$, C D.

Nam trapezium, C R G F, ad, G D, est vt composita ex, R C, &, $\frac{1}{2}$, C D, ad, R D, insuper, G D, ad, A M, est vt, R D, ad, C M, & tandem, A M, ad trapezium, F C M O, est vt, C M, ad, M D, cum, $\frac{1}{2}$, C D, ergo ex æquali trapezium, F G R C, ad trapezium, F C M O, erit vt, R C, cum, $\frac{1}{2}$, C D, ad, M D, cum, $\frac{1}{2}$, D C, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

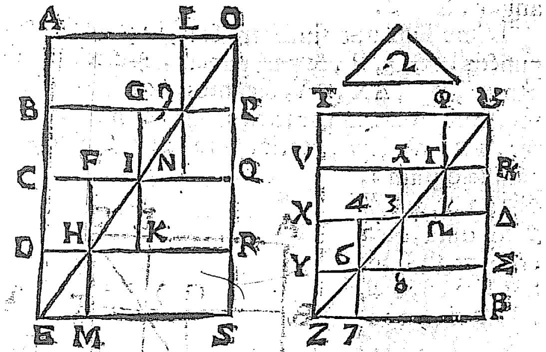
3. huius. *Hinc patet omnes lineas trapezij, F G R C, regula, R M, ad omnes lineas trapezij, F C M O, regula eadem esse, vt, R C, cum, $\frac{1}{2}$, C D, ad, M D, cum, $\frac{1}{2}$, D C, veluti autem in antecedenti ostendimus, si, C D, sit æqualis ipsi, D F, omnes lineas trapezij, F G M O, regula, C M, æquari omnibus abscissis ipsius, F D, adiuncta, D M, ita in præsenti ostendemus omnes lineas trapezij, F G R C, regula, R D æquari residuis omnium abscissarum ipsius, A C, vel, F D, adiuncta, R C; vnde patebit residuas abscissarum propositæ lineæ, vt, F D, adiuncta, R C, ad omnes abscissas eiusdem, adiuncta alia linea, vt, D M, esse vt compositum ex prima adiuncta, &, $\frac{1}{2}$, propositæ, C D, siue, F D, illi æqualis, ad compositum ex secunda adiuncta, &, $\frac{1}{2}$, propositæ lineæ, idest vt, R C, cum, $\frac{1}{2}$, C D, vel, D F, ad, M D, cum, $\frac{1}{2}$, C D, vel, D F.*

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

Expositis duobus vtcunq; parallelogrammis, in eisdemque ductis diametris, & duobus vtcunq; lateribus pro regula sumptis, nempè in vnoquoq; eorum vno: Omnia quadrata cuiusuis dictorum parallelogrãmorum ad omnia quadrata cuiusuis triangulorum per diametrum in ipso constitutorum, erunt vt omnia quadrata reliqui parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusuis triangulorum per diametrum in isto ductam pariter constitutorum.

Sint exposita vtcunque parallelogramma, A S, T β, in ijsque ductæ diametri, E O, Z &, regulis sumptis, E S, Z β. Dico omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata trianguli, O E S, esse vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata, & Z β. Si enim, vt omnia quadrata,

drata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β, ita non sunt omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata trianguli, O E S, erunt igitur ita omnia quadrata, A S, ad maius, vel ad minus omnibus quadratis trianguli, O E S, sint excessus, vel defectus, omnia quadrata figuræ planæ, Ω, diuidatur autem latus, O S, bifariam, in, Q, &, O Q, Q S, bifariam in, P, R, & sic deinceps fiat, ita vt ductis per puncta diuisionum parallelis ipsi, E S, D R, C Q, B P, tandem deuentum sit ad parallelogrammum, D S, cuius omnia quadrata, regula, E S, sint minora omnibus quadratis figuræ, Ω, per puncta autem, in quibus dictæ parallelæ ipsam, O E, secant, ducantur vsque ad proximas parallelas æquidistantes lateribus, A E, O S, ipsæ, L N, G K, E M, erit igitur triangulo, O E S, circumscripta figura quædam cõposita ex parallelogrãmo, L P, G Q, F R, D S, & alia inscripta composita ex parallelogrammis, 9 Q, I R, H S, ita vt omnia quadrata figuræ circũscriptæ, regula, E S, excedant omnia quadrata inscriptæ, regula eadẽ, minori quantitate, quam sint omnia quadrata figuræ, Ω; nam in parallelogrammo, D S, recta, H M, diuidit omnia quadrata, D S, in omnia quadrata, D M, in omnia quadrata, H S, & in rectangula bis sub, D M, M R, veluti punctum, H, diuidit quadratum, D R, in quadrat. D H, quadrat. H R, & rectangulum bis sub, D H R, siue ex 23. seq. ab hac independente, & ideò omnia quadrat. D S, excedunt omnia quadrata, H S, omnibus quadratis, D M, & rectangulis bis sub, D M, M R, eodem pacto ostendemus omnia quadrata, F R, excedere omnia quadrata, I R, omnibus quadratis, F K, & rectangulis bis sub, F K, K O, & sic omnia quadrata, G Q, excedere omnia quadrata, 9 Q, omnibus quadratis, G N, cum rectangulis bis sub, G N, N P, & in figura circumscripta supersunt adhuc omnia quadrata, L P, porrò si hos excessus simul colligamus fient omnia quadrata, D S, nam si omnia quadrata, L P, vel, 9 Q, iunxeris omnibus quadratis, G N, & re- Iux. prim. 20. Elem.

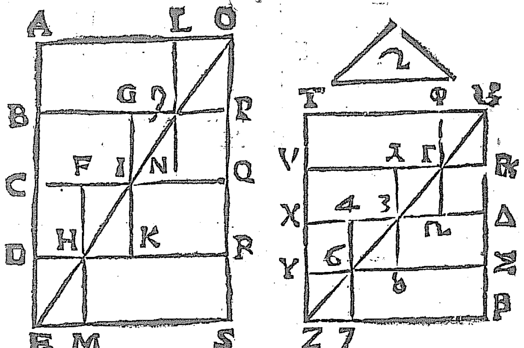


& rectangulis bis ſub, G N, N P, fient omnia quadrata, G Q, hęc ſi iunxeris omnibus quadratis, F K, cum rectangulis bis ſub, F K, K Q, fient omnia quadrata, F R, quę tandem ſi iunxeris omnibus quadratis, D M, cum rectangulis bis ſub, D M, M R, fient omnia quadrata, D S, quę cum ſint minora omnibus quadratis figurę, Ω, hinc figuræ circumſcriptæ omnia quadrata excedunt omnia quadrata inſcriptę minori quantitate, quam ſint omnia quadrata, Ω, & ideò excedunt omnia quadrata trianguli, O E S, multò minori quantitate: Quia ergo omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata trianguli, O E S, cum omnibus quadratis, Ω, erant vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β, hinc omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata figurę circumſcriptę triangulo, O E S, habebunt maiorem rationem, quam omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β.

Nunc diuidatur ſimiliter, & β, in punctis, ℞, Δ, Σ, ac, O S, in punctis, P, Q, R, & per puncta, ℞ Δ Σ, parallelæ ipſi, Z β, ducantur, ℞ V, Δ X, Σ Y, ſecantes, & Z, in punctis, Γ, 3, 6, per quę vſque ad proximas parallelas ipſis, & β, T Z, æquidiſtantes ducantur, Φ Γ, Λ 3, 4 6, vt triangulo, & Z β, ſit circumſcripta figura ex parallelogrãmis, Φ ℞, Λ Δ, 4 Σ, Y β, cõpoſita, quia ergo, vt, O S, ad, S R, ita eſt, & β, ad, β Σ, vt autem, O S, ad, S R, ita ſunt omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata, D S, & vt, & β, ad, β Σ, ita ſunt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata, Y β, ergo omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata, D S, ſunt vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata, Y β, quia verò omnia quadrata, Y β, ad omnia quadrata, 6 β, .i. ad omnia quadrata, 4 Σ, ſunt vt quadratum, Z β, ad quadratum, 7 β, .i. ad quadratum, 6 Σ, .i. vt quadratum, β &, ad quadratum, & Σ, .i. vt quadratum, S O, ad quadratum, O R, ideſt vt quadratum, E S, ad quadratum, H R, ideſt, vt omnia quadrata, D S, ad omnia quadrata, F R, ergo ex æquali omnia

10. huius.

9. huius.



nia quadrata, A S, ad omnia quadrata, F R, erunt vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata, 4 Σ: Eodem pacto oſtendemus omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata, G Q, eſſe vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata, Λ Δ, & tandem omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata, L P, eſſe vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata, Φ ℞, vnde, colligendo, omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata parallelogrammorum, D S, F R, G Q, L P, ideſt figurę circumſcriptæ, erunt vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata parallelogrammorum, Φ ℞, Λ Δ, 4 Σ, Y β, ideſt ad omnia quadrata figuræ circumſcriptæ triangulo, & Z β, ſed omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata figuræ circumſcriptæ triangulo, O E S, oſtenſa ſunt habere maiorem rationem, quam omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β, ergo omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata figuræ circumſcriptæ triangulo, & Z β, habebunt maiorem rationem, quam ad omnia quadrata trianguli, & Z β, ergo omnia quadrata figuræ circumſcriptæ triangulo, & Z β, minora erunt omnibus quadratis trianguli, & Z β, quod eſt abſurdum, non ergo omnia quadrata, A S, ad maius, quam ſint omnia quadrata trianguli, O E S, habent eandem rationem, quam omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β.

9. huius.

Defin. 12. lib. 1.

Dico autem neque ad minus eiuſdem habere eandem rationem, ſint enim defectus adhuc omnia quadrata figurę, Ω, & ſit circumſcripta triangulo, O E S, figura ex parallelogrammis, L P, G Q, F R, D S, & alia inſcripta ex parallelogrammis, M Q, I R, H S, compoſita, ita vt omnia quadrata circumſcriptæ ſuperent omnia quadrata inſcriptę minori quantitate, quam ſint omnia quadrata, Ω, ergo omnia quadrata trianguli, O E S, ſuperabunt omnia quadrata inſcriptæ figuræ multo minori quantitate, ſunt autem omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata trianguli, O E S, detractis omnibus quadratis, Ω, vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β, ergo omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata inſcriptæ figuræ habebunt minorem rationem, quam omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β. Diuidatur nunc pariter latus, & β, in punctis, ℞, Δ, Σ, ſimiliter ac, O S, diuiditur in, P, Q, R, & cætera, vt ſupra, fiant, vt habeamus figuram inſcriptam ex parallelogrammis, Γ Δ, 3 Σ, 6 β, compoſitam, oſtendemus igitur, vt ſupra, omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata figurę inſcriptę triangulo, O E S, eſſe vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triangulo, & Z β, ſunt autem omnia quadrata, A S, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triangulo, O E S, in minori ratione, quam ſint omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β, ergo omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata figurę inſcriptæ

ptæ triangulo, & Z β, erunt in minori ratione, quam omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β, ergo figuræ inscriptæ triangulo, & Z β, omnia quadrata maiora erunt omnibus quadratis trianguli, & Z β, quod est absurdum, igitur omnia quadrata, A S, non ad minus, quam sint omnia quadrata trianguli, O E S, erunt vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata trianguli, & Z β, sed neque ad maius, vt ostensum est ergo ad ipsa erunt, vt omnia quadrata, T β, ad omnia quadrata, & Z β. Si autem comparentur omnia quadrata, A S, T β, ad omnia quadrata triangulorum, A E O, T Z &, eodem modo fiet demonstratio, igitur ostensum est, quod erat demonstrandum.

A. COROLLARII SECTIO I.

Hinc patet quæcunque de omnibus quadratis parallelogrammorum tales, vel tales conditiones habentium in Propos. 9. 10. 11. 12. 13. 14. huius Libri ostensa sunt, eadem de omnibus quadratis triangulorum, tanquam de eorundem partibus proportionalibus verificari, regula vno latere sumpta, dum triangula circa altitudines, & bases, siue à basibus descriptas figuras, & latera æqualiter basibus inclinata, easdem obtinuerint conditiones ibi notatas.

B. SECTIO II.

9. huius. *Igitur triangulorum in eadem altitudine existentium omnia quadrata, vel omnes figuræ similes (siue sint similes ad inuicem, quæ sunt vtriusque trianguli, siue dissimiles) erunt vt figuræ à basibus descriptæ.*

C. SECTIO III.

10. huius. *Et si triangula fuerint in eadem, vel æqualibus basibus, omnes figuræ similes, vtriusque ad inuicem, erunt vt altitudines, vel vt latera basibus æqualiter inclinata.*

D. SECTIO IV.

11. huius. *Item triangulorum omnia quadrata, siue omnes figuræ similes, etiamsi sint dissimiles, quæ sunt vtriusq; trianguli, habebunt rationem compositam ex ratione figurarum à basibus descriptarum, & altitudinum, siue laterum basibus æqualiter inclinatorum.*

E. SE-

E. SECTIO V.

Et triangulorum, quorum basium figuræ altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocantur, omnes figuræ, similes basium figuris, sunt æquales: Et si omnes figuræ, similes basium figuris, sint æquales, figuras basium altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocè respondentes habebunt. 12. huius.

F. SECTIO VI.

Et tandem similium triangulorum omnia quadrata erunt in tripla ratione laterum homologorum, siue vt eorum cubi; regulas verò in supradictis suppono semper duo illorum triangulorum latera, quæ bases voco; hic verò intellige illorum triangulorum latera homologa. His autem sequentem Propositionem subiungam, tum huius gratia, tum eorum, quæ sequentur. Iuxt. difin. 1. Sexti Elem. 12. huius.

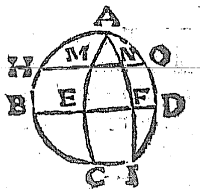
THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

Si, exposita quacunque figura plana, in ea ducatur vtcunque recta linea, quæ sit sumpta pro regula, eadem verò in puncto, vel punctis diuisa, prout lib. 2. Elem. supponitur secari, per puncta diuisionum lineas duxerimus rectas, siue curuas, figuram diuidentes, & semel tantum secantes quamuis aliam regulæ parallelam, si regula in vno puncto tantum diuisa sit, vel toties, quot sunt puncta diuisionum regulæ (exceptis tamen extremis, in quibus linearum sectæ partes in puncta aliquando degenerare possunt.) Quæcunq; in dict. 2. lib. demonstrantur hac diuisione supposita circa vel quadrata, vel rectangula eidem rectæ lineæ applicata, eadem de omnibus quadratis dictæ figuræ, vel eiusdem partium, vel de rectangulis sub ipsis pariter verificabuntur. D. Diff. 8. huius.

Sit exposita vtcunq; figura plana, A B C D, in qua ducta, B D, recta linea vtcunq; sit illa sumpta pro regula, & ea diuisa in vno, vel pluribus punctis, prout postulant Propos. 2. lib. Elem. per puncta diuisionum ducantur lineæ siue rectæ, siue curuæ, A E C, A F I, toties quamuis aliam ipsi, B D, parallelam in figura, B A D C, secantes

V 2 quo-

quoties, B D, secta esse supponitur, exceptis tamen extremis, vt ex.
gr. ipsa, C I, in qua parte, C I, quæ in recta, C I, separari debuis-
sent per lineas, A E C, A F I, in puncta, C, I, partibus, B E, F D,
respondentia degenerauerunt. Dico quæcunque demonstrantur in
linea, B D, circa quadrata, vel rectangula, illi, vel illius partibus ap-
plicata, verificari de omnibus quadratis totius figuræ, B A D C, siue
partium eiusdem figuræ per dictas lineas constitutarum, siue de re-
ctangulis sub eiusdem partibus. Vt ex. gr. quia in 3. Propos. lib. 2.
Vide D. Defin. 8. huius. Elem. ostenditur rectangulum sub, B D, D F, æquari rectangulo
sub, B F D, cum quadrato, F D, sic dico verum esse rectangula sub
figura, A B C D, & figura, A D I, æquari re-
ctangulis sub figuris, A B I F, A D I F, cum om-
nibus quadratis figuræ, A D I F, si enim aliam
vtcunque duxerimus regulæ, B D, parallelam,
vt, H O, secantem lineas, A C, in, M, &, A
I, in, N, verum esse comperiemus rectangulum,
H O N, æquari rectangulo, H N O, cum qua-
drato, N O, & idem in cęteris regulę, B D, pa-
rallelis in figura, A B C D, ductis reperiemus,



ergo verum erit rectangula illa simul collecta, idest rectangula sub fi-
Coroll. 4. huius. gura, A B I D, & figura, A D I, æquari rectangulis sub figuris, A B
I, A D I, cum omnibus quadratis, A D I, quod 3. Proposit. 2. lib.
Elem. respondet.

Similiter si supponamus, B F, bifariam secari in, E, cui adiunga-
tur, F D, supposuerimus etiam lineam, A C, bifariam secare quam-
libet omnium linearum figuræ, A B I, regula, B D, supradictarum,
quarum singulis aditur, quę in directum manet in figura, A D I, ve-
luti Propos. 6. ostenditur rectangulum, B D F, cum quadrato, F E,
æquari quadrato, E D, ita hic ad modum superioris ostendemus re-
ctangula sub figura, A B I D, &, A D I, cum omnibus quadratis fi-
guræ, A C I, æquari omnibus quadratis figuræ, A C D, quod re-
spondet Prop. 6. eiusdem lib. Consimiliter reliqua demonstrabimus,
vnde iuxta 1. Propos. Secundi Elem. colligemus.

A. COROLLARII SECTIO I.

Rectangula sub figura indiuisa, A B I D, & sub diuisa, A C D, per lineam, A I, æquari rectangulis sub indiuisa, A B I D, & sub partibus diuisæ, quæ sunt, A C I, A I D.

B. SECTIO II.

Iuxta secundam habebimus omnia quadrata figuræ, A B I D, æquari rectang. sub, A B I D, & singulis partibus, A B I, A I D.

C. SECTIO III.

Iuxta tertiam iam dictum est in Propositione quid colligamus.

D. SECTIO IV.

Iuxta quartam habemus omnia quadrata figuræ, A B I D, per vnicam lineam, A F I, diuisæ, æquari omnibus quadratis figurarum, A B I, A I D, & rectangulis bis sub dictis fig. A B I, A I D.

E. SECTIO V.

Iuxta quintam, si supponamus lineam, A I, bifariam diuidere omnes lineas figuræ, A B I D, regula, B D, sumptas, & easdem lineam, A C, non bifariam diuidere, colligemus rectangula sub inæqualibus partibus, A B C, A C D, cum omnibus quadratis figuræ, A C I, æquari omnibus quadratis figuræ, A B I.

F. SECTIO VI.

Iuxta sextam quid colligatur iam dictum est in Propositione.

G. SECTIO VII.

Iuxta septimam colligemus, supposito, quod figura, A B I D, secetur à sola linea, A I, vtcunque, dummodo eadem secet omnes æquidistantes ipsi regulæ, B D, in figura, A B I D, ductas, & in vno tantum puncto, colligemus inquam omnia quadrata figuræ, A B I D, & omnia quadrata figuræ, A D I, æquari rectangulis bis sub figuris, A B I D, A D I, vna cum omnibus quadratis, A B I.

H. SECTIO VIII.

IVxta octauam, si supponamus figuram, ABCD, vtcunque sectam per lineam, AC, (quæ tamen secet omnes ipsi, BD, æquidistantes in figura, ABCD, ductas, & in vno tantum puncto vti dictum est) colligemus rectangula quater sub figuris, ABCD, ABC, cum omnibus quadratis, ACD, æquari omnibus quadratis figuræ compositæ ex figura, ABCD, &, ABC, ita vt omnium linearum figuræ, ABCD, singulis intelligatur adiecta, quæ nunc in figura, ABC, est cum illa in eadem rectitudine.

I. SECTIO IX.

IVxta nonam, si supponamus lineam, AI, secare omnes æquidistantes ipsi, BD, in figura, ABID, ductas bifariam, & lineam, AC, easdem bifariam non secare, colligemus omnia quadrata figuræ, ACD, cum omnibus quadratis figuræ, ABC, dupla esse omnium quadratorum figuræ, AID, cum omnibus quadratis figuræ, ACI, intermediæ.

K. SECTIO X.

IVxta decimam, si supponamus, AC, lineam bifariam secare omnes æquidistantes ipsi, BD, in figura, ABI, ductas, & illis addi, quæ in directum illis iacent in figura, AID; colligemus omnia quadrata figuræ, ABCD, cum omnibus quadratis figuræ, ADI, dupla esse omnium quadratorum figuræ, ABC, cum omnibus quadratis figuræ, ACD.

L. SECTIO XI.

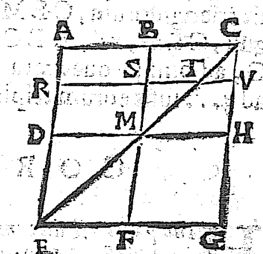
IVxta vndecimam, si supponamus, BD, in, E, ita sectam esse, vt rectangulum, DBE, sit æquale quadrato, ED, quælibet autem æquidistantium ipsi, BD, in figura, ABCD, tali modo, & ad eandem partem diuiditur per lineam, AEC, patet, quod etiam rectangula sub figuris, ABCD, ABC, æquabuntur omnibus quadratis figuræ, ACD, igitur linea, AC, diuidet superficiem planam, ABCD, regula, BD, (sic dicere liceat) secundum extremam, ac mediam rationem, hæc autem pro sequentibus accuratè memoriæ commendetur.

THEO-

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

EXposito parallelogrammo quocunq; in eoque ducta diametro; omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusuis triangulorum per dictam diametrum constitutorum erunt in ratione tripla, vno laterum parallelogrammi communi regula existente.

Sit parallelogrammum, AG, in eo ducta diameter, CE, regula vtcunque latus, EG. Dico omnia quadrata, AG, esse tripla omnium quadratorum trianguli cuiusuis, AEC, siue, CEG. Diuidantur bifariam latera, AC, CG, in punctis, B, H, & per, B, ipsi, CG, perque, H, ipsi, CA, parallelę ducantur, BF, DH, quę se cum recta, CE, communiter bifariam secabunt in puncto, M. Quia igitur in figura, siue parallelogrammo, AG, ducitur linea, BF, quę omnes æquidistantes ipsi, EG, bifariam secat, &, CE, quæ easdem in partes inæquales diuidit, pręterquam, DH, omnia quadrata trianguli, AEC, cum omnibus quadratis trianguli, CEG, & cum omnibus quadratis duorum triangulorum, CBM, EMF, dupla erunt omnium quadratorum, AF, licet enim, DH, per lineam, CE, fit non bifariam diuisa, nihil tamen hoc obstat nostro proposito, nam & ipsi, DH, contingit, veluti ijs, quæ inæqualiter secantur, quadratum sectarum partium, scilicet quadrata, DM, MH, dupla esse quadratorum dimidiæ, nempè quadrati, DM, & eius, quæ inter sectiones interijcitur, quæ hic nulla est, cum duę secantes, BF, CE, vniantur in puncto, M: Sunt autem omnia quadrata trianguli, AEC, æqualia omnibus quadratis trianguli, CEG, quia sunt triangula in æqualibus basibus, EG, AC, & eadem altitudine licet euersè posita, & ideò omnia quadrata trianguli, CEG, sunt æqualia omnibus quadratis, AF, cum omnibus quadratis triangulorum, CBM, MEF. Quoniam verò omnia quadrata trianguli, BMC, sunt æqualia omnibus quadratis trianguli, CMH, omnia verò quadrata trianguli, CEG, ad omnia quadrata trianguli, CMH, sunt in tripla ratione eius, quam habet, GC, ad, CH, quæ est dupla .i. in ratione octupla, & hoc, quia triangula, CEG, CMH, sunt similia, ideò omnia quadrata, CEG, erunt octupla om-

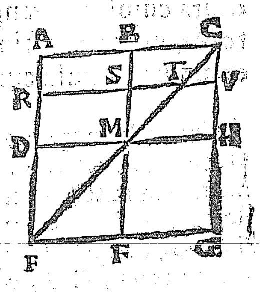


Per I. Corol. antec.

Vide D. lib. 7. Annot. Proposit. 8.

Ex B. vel C. Corol. Prop. 22. huius.

omnium quadratorum, C M H, & quadrupla omnium quadrato-
omnium quadratorum, C M H, vel, C B M, &, M E F, ſunt autem omnia quadrata
rum, C M H, vel, C B M, &, M E F, ſunt autem omnia quadrata
trianguli, C E G, æqualia omnibus quadratis, A F, cum omnibus
quadratis triangulorum, C B M, M E F, ergo hæc erunt quadrupla
omnium quadratorum triangulorum, C B M, M E F, & diuidendo
9. huius. omnia quadrata, A F, erunt illorum tripla,
ſunt autem omnia quadrata, A G, ad om-
nia quadrata, A F, vt quadratum, G E, ad
quadratum, E F, ideſt quadrupla .i. vt 12.
ad 3. & omnia quadrata, AF, ſunt omnium
quadratorum triangulorum, B M C, M E
F, tripla, ergo omnia quadrata, A G, e-
runt duodecupla omnium quadratorum
triangulorum, B M C, M E F, & ſunt ad
omnia quadrata, A F, vt 12. ad 3. ergo om-
nia quadrata, A G, ad omnia quadrata, A
F, cum omnibus quadratis triangulorum, C B M, M E F, erunt vt
12. ad 4. ſunt autem omnia quadrata, A F, cum omnibus quadra-
tis triangulorum, C B M, M E F, æqualia omnibus quadratis trian-
guli, C E G, vel, A E C, vt oſtenſum eſt, ergo omnia quadrata, A
G, ad omnia quadrata trianguli, C E G, vel, A E C, ſunt vt 12.
ad 4. .i. ſunt eorum tripla, quod oſtendendum erat.



COROLLARIVM.

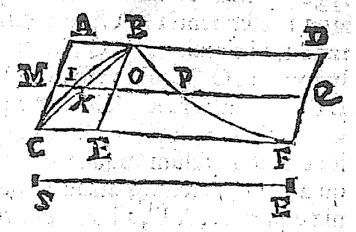
*Hinc patet, ſi ducamus intra parallelogrammum, A G, æquidiſtan-
tem ipſi, E G, vtcunque, R V, ſecantem, C E, in, T, &, B F,
in, S, quod veluti oſtendimus, R V, æquari vni maximarum abſciſſarum,
C G, dum, E G, eſt æqualis ipſi, G C, ita nunc oſtendemus quadratum,
R V, æquari quadrato vnius maximarum abſciſſarum, C G, & quadra-
tum, T V, æquari quadrato vnius omnium abſciſſarum, C G, ideſt qua-
drato, V C; quadratum verò, R T, æquari quadrato vnius reſiduarum
omnium abſciſſarum, C G, ideſt quadrato, V G, vnde concludemus om-
nia quadrata, A G, regula, E G, æquari quadratis maximarum abſciſ-
ſarum, C G, & omnia quadrata trianguli, C E G, æquari quadratis om-
nium abſciſſarum, C G, & omnia quadrata trianguli, A E C, æquari
quadratis reſiduarum omnium abſciſſarum, C G, & rectangula ſub tri-
angulis, A E C, C E G, æquari rectangulis ſub omnibus abſciſſis, & re-
ſiduis omnium abſciſſarum, C G, ita ſumptis, vt quoduis rectangulum
intelligatur ſub vna abſciſſarum, & eius reſidua: Vnde veluti oſtendi-
mus omnia quadrata, A G, tripla eſſe omnium quadratorum trianguli,*
C E G,

*C E G, vel trianguli, C A E, ex quo patet tripla etiam eſſe rectangulo-
rum bis ſub triangulis, A E C, C E G, (ſunt enim omnia quadrata, A G,
æqualia omnibus quadratis triangulorum, A E C, C E G, & rectangulis* D. Coro.
bis ſub eiſdem triangulis) ita apparebit quadrata maximarum abſciſſa- 23. huius.
*rum, C G, tripla eſſe quadratorum omnium abſciſſarum, vel quadrato-
rum reſiduarum omnium abſciſſarum, C G, & tripla etiam eſſe rectan-
gulorum ſub dictis omnibus abſciſſis, reſiduiſque bis ſumptis, ſexcupla
verò eorundem rectangulorum ſemel ſumptorum. ſunt autem maximæ
abſciſſarum, abſciſſæ, & reſiduæ recti tranſitus ſi angulus, E G C, ſit re-
ctus, vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi ille non ſit angulus rectus.* Ex diff. 1. huius.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

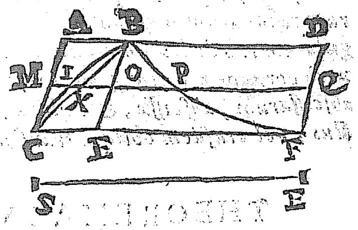
SI in duobus parallelogrammis ſumptis duobus lateribus pro baſibus, & regulis, ipſa parallelogramma fuerint in eadem altitudine ſumpta reſpectu dictarum baſium; in eiſdem autem baſibus, & altitudine fuerint aliæ duæ planæ figuræ ita ſe habentes, vt ſi ducatur vtcunque parallela dictis baſibus (quæ in directum ſint conſtitutæ) recta linea, eiuſdem portiones dictis parallelogrammis, & figuris interceptæ, vel ab eiſdem deſcriptę planæ figuræ, ſint proportionales, homologis exiſtentibus, quæ ſunt in parallelogrammis, & pariter quę ſunt in figuris, in iiſdem baſibus, & altitudine cum illis conſtitutis, dictorum parallelogrammorum, ac figurarum omnes lineæ, ſi lineæ, vel omnes figurę planę ſimiles, ſi iſtæ comparentur (ſimiles in quam exiſtentibus, quæ ſunt in vnaquaque figura) erunt proportionales.

Sint parallelogramma, A E, E D, in baſibus, C E, E F, in directum iacentibus, & in eadem altitudine reſpectu dictarum baſium conſtituta, A E, E D, ſit autem regula, C E, vel, E F, & in eiuſdem tanquam in baſibus, & eadem altitudine cum parallelogrammis, A E, E D, ſint figuræ, B C E, B E F, eiuſmodi, vt ſi duxerimus vtcunque ipſi, C F, parallelam, vt, M Q, cuius portiones interceptę parallelogrammis,



X A E,

AE, ED, sint, MO, OQ; & interceptę figuris sint, IO, OP, reperiamus, MO, ad, OI, esse vt, QO, ad, OP. Dico omnes lineas, AE, ad omnes lineas figurę, BCE, esse vt omnes lineę, BF, ad omnes lineas figuræ, BEF, si verò vice linearum comparentur ab eisdem descriptę figurę, similibus existentibus, quę ab omnibus lineis vniuscuiusque propositarum figurarum describuntur, cuius describentes sint earum lineę, vel latera homologa. Dico omnes figuras similes ipsius, AE, ad omnes figuras similes figurę, BCE, esse vt omnes figuras similes ipsius, BF, ad omnes figuras similes figuræ, BEF, quia enim, MQ, vtcunque ducta est parallela ipsi, CF, & est, MO, ad, OI, vt, QO, ad, OP, permutando erit, vt, MO, ad, OQ, sic, IO, ad, OP, .i. vt, CE, ad, EF, sic, IO, ad, OP, & sic ostendemus, vt, CE, ad, EF, ita esse quaslibet alias duas in figuris, BCE, BEF, existentes ipsi, CF, parallelas, & vt vna ad vnam



Coroll.4. huius. sic omnia ad omnia .i. vt, CE, ad, EF, ita omnes lineæ figurę, BCE, ad omnes lineas figurę, BEF, vt autem, CE, ad, EF, ita sunt omnes lineæ, AE, ad omnes lineas, ED, ergo omnes lineę, AE, ad omnes lineas, ED, erunt vt omnes lineę figurę, BCE, ad omnes lineas figuræ, BEF.

Si verò vice linearum sumamus descriptas, vt dictum est, ab eisdem figuras, ex. gr. si, vt quadratum, MO, ad triangulum æquilaterum, cuius latus, IO, ita reperiamus esse circulum, cuius diameter, OQ, ad polygonum, cuius latus, OQ, omnium autem linearum, AE, singulæ describant quadrata, & omnium linearum figuræ, BCE, singulę describant, triangula æquilatera, & omnium linearum, BF, singulæ describant circulos, & figuræ, BEF, singulę describant polygona prædicto similia, ita vt quæ in eadem figura sunt lineæ, vel latera describentia sint homologa, erit vt quadratum, MO, permutando, ad circulum, OQ, ita triangulum æquilaterum, IO, ad polygonum, OP, quia verò, MO, æquatur ipsi, CE, &, OQ, ipsi, EF, ideò quadratum, MO, æquatur quadrato, CE, & circulus,
23.lib.1. OQ, circulo, EF, & ideò, vt quadratum, CE, ad circulum, EF, ita erit triangulum æquilaterum, IO, ad polygonum, OP, vnde, quia, MQ, vtcunq; ducta est parallela ipsi, CF, concludemus omnia quadrata, AE, ad omnes circulos, BF, esse, vt omnia triangu-
Ex 4. huius. la æquilatera figuræ, BCE, ad omnia polygona vni similia figuræ, BEF, & permutando omnia quadrata, AE, ad omnia triangula æqui-

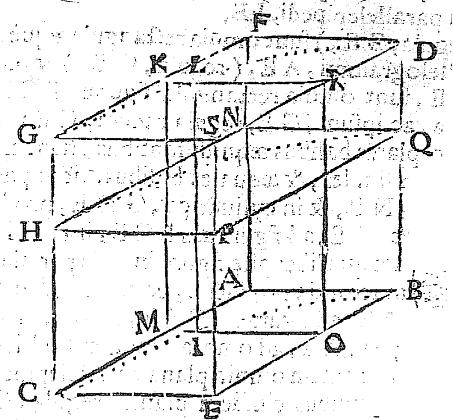
quilatera figuræ, BCE, esse, vt omnes circuli, BF, ad omnia polygona vni similia figuræ, BEF.

Eodem modo fiet demonstratio, si vice istarum aliæ assumantur figuræ planæ, quarum possunt etiam, quæ sunt duarum figurarum esse similes, vt si comparentur omnia quadrata parallelogrammorum, AE, ED, & omnia triangula æquilatera figurarum, BCE, BEF, vel si comparentur omnia quadrata, AE, & figuræ, BCE, & omnia triangula æquilatera, BF, & figuræ, BEF; potest etiam esse omnium quatuor figurarum omnes figuras esse similes, vt si comparentur omnia quadrata eorundem, vel omnes circuli, &c. patet autem hic demonstrationem currere quotiescunque ea, quæ comparantur sunt eiusdem generis .s. vel lineæ, vel superficies, si verò contingat magnitudines diuersi generis comparari, vt si compararentur omnes lineæ, AE, & figuræ, BCE, & omnia quadrata, BF, & figurę, BEF, tunc quia à permutata ratione non possumus argumentari, cum lineam superficiei comparare sit absurdum, ideò demonstratio pro his non currit, quapropter aliud Theorema pro hoc subiungemus.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

IN eadem antecedentis Propos. figura si comparentur magnitudines diuersi generis, adhuc comparatæ magnitudines erunt proportionales.

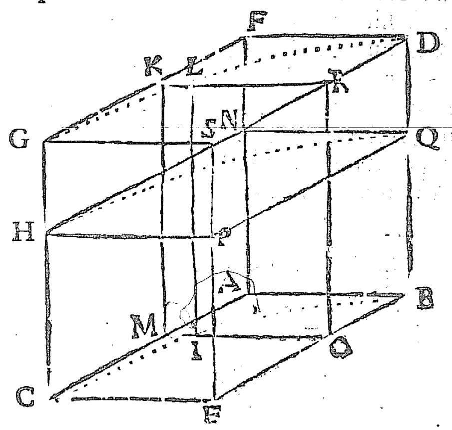
Comparentur ex. gr. omnes lineæ, AE, regula, CE, ad omnes lineas figuræ, BCE, & omnia quadrata, BF, regula, EF, ad omnia quadrata figurę, BEF, ita vt ducta vtcunq. ipsi, CF, parallela, MQ, reperiamus, MO, ad, OI, esse vt quadratum, QO, ad quadratum, OP. Dico adhuc omnes lineas, AE, ad omnes lineas figurę, BCE, esse vt omnia quadrata, BF,



ad omnia quadrata figurę, BEF; ponatur seorsim parallelogrammum,

B. Def. 4. lib. 1. mum, A E, simul cum figura, B C E, sed, ne fiat confusio, sint sub ampliori forma, & in ipsis tanquam in basibus constituti intelligantur duo cylindrici recti, F E, nempè in basi, A E, &, D G E, in basi figura, B C E, & in eadem altitudine, quorum quod insistit ipsi, A E, est parallelepipedum, vt facilè ostendetur, intelligatur nunc parallelepipedum, F E, secari vtcunque plano ipsi, G E, æquidistante,

Coroll. 6. lib. 1. producetur ergo ex hac sectione in ipso parallelogrammum rectangulum, quod sit, K O, eodem autem plano fiat in cylindrico, D G E, rectangulum, L O, fiet autem & in hoc cylindrico rectangulum, quia dictum planum ducitur per latera basi, B C E, rectè insistentia, cum ducatur æquidistanter ipsi, G E, quod ducitur per latera, G C, S E, erit ergo rectangulum, K O, vnum ex ijs, quę dicūtur omnia plana parallelepipedi, F E, regula, G E, & rectangulum, L O, erit vnum ex ijs, quę dicuntur omnia plana cylindrici, G D E, regula, G E, quę rectangula erunt æquè alta, ac rectangulum, G E, omnia igitur plana parallelepipedi, F E,



(regula, G E,) sunt omnia rectangula æquè alta, ac, G E, ipsius pa-

E. Def. 8. huius. rallelogrammi, A E, (regula, C E,) & omnia plana cylindrici, G D E, sunt omnia rectangula figuræ, B C E, æquiangula, & æquè alta, ac ipsum, G E, regula eadem, C E: Secentur nunc dicti cylindrici planis basibus æquidistantibus, fient ergo communes eorum se-

Coroll. 3. lib. 1. ctiones similes, & æquales basibus, sit in parallelepipedo, F E, producta, N P, & in cylindrico, G D E, producta figura, H Q P, erit ergo vt, A E, ad figuram, B C E, ita, N P, ad figuram, H Q P, & ita etiam quælibet aliæ figuræ in ipsis per plana æquidistanter basibus

Ex Corol. 4. huius. eosdem secantia productæ, & vt vna ad vnam, sic omnes ad omnes .i. vt, A E, ad figuram, C B E, ita omnia plana parallelepipedi, F E, regula, A E, ad omnia plana cylindrici, G D E, regula eadem

Ex Corol. 2. huius. basi, sunt autem omnia plana parallelepipedi, F E, regula, A E, æqualia omnibus eiusdem planis, regula, G E, quæ sunt omnia re-

E. Def. 8. lib. 1. ctangula ipsius, A E, regula, C E, æquè alta, ac ipsum, G F, & omnia plana cylindrici, G D E, regula basi, C B E, sunt æqualia omnibus

nibus

nibus eiusdem planis, regula, G E, quæ & ipsa sunt omnia rectangula figuræ, C B E, regula, C E, æquè alta, ac ipsum, G E, ergo omnia rectangula ipsius, A E, regula, C E, æquè alta, ac ipsum, G E, ad omnia rectangula figuræ, C B E, regula, C E, æquè alta, ac ipsum, G E, erunt vt, A E, ad figuram, B C E, .i. vt omnes lineę, A E, ad omnes lineas, B C E, regula, C E, quod serua. Ex Cor. 2. huius. 3. huius.

Conspiciatur nunc figura Theorematis anteced. in qua diximus, M O, ad, O I, esse vt quadratum, Q O, ad quadratum, O P. Dico omnes lineas, A E, ad omnes lineas figurę, B C E, regula, C E, esse vt omnia quadrata, B F, ad omnia quadrata figurę, B E F, quia enim, vt, M O, ad, O I, ita (sumpta quauis communi altitudine, nempè ex. gr. altitudine constitutorum parallelepipedorum, quę est, S E,) rectangulum sub, M O, &, S E, ad rectangulum sub, I O, S E, ideò, vt rectangulum sub, M O, S E, ad rectangulum sub, I O, S E, ita erit quadratum, O Q, ad quadratum, O P, sunt autem hæ magnitudines eiusdem generis, nempè omnes superficies, ergo omnia rectangula ipsius, A E, regula, C E, æquè alta, ac vnum eorum, Ex antec. nempè, vt rectangulum sub, C E, E S, ad omnia rectangula figurę, B C E, regula eadem, C E, æquè alta, ac vnum eorum, vt, G E, erunt vt omnia quadrata, B F, ad omnia quadrata figuræ, B E F, omnia verò rectangula ipsius, A E, æquè alta, ac vnum eorum, vt, G E, ad omnia rectangula figuræ, B C E, æquè alta, ac ipsum, G E, sunt vt omnes lineæ ipsius, A E, ad omnes lineas figuræ, B C E, Ex proximè dictis. regula, C E, ergo omnes lineæ, A E, ad omnes lineas figuræ, B C E, regula, C E, erunt vt omnia quadrata, B F, ad omnia quadrata figuræ, B E F, sunt ergo proportionales, licet sint magnitudines diuersi generis, nempè lineę, & superficies, quod ostendere opus erat.

COROLLARIVM I.

Hinc igitur primò habetur, si fuerint parallelogrammum, & figura plana in eadem basi, & altitudine, regula sumpta basi, omnia rectangula parallelogrammi æquè alta ad omnia rectangula illius figuræ æquè alta ac prædicta, esse vt dictum parallelogrammum ad dictam figuram, quod patuit, dum ostensum est omnia rectangula ipsius, A E, altitudinis, S E, ad omnia rectangula figuræ, B C E, altitudinis eiusdem, S E, esse vt, A E, ad figuram, B C E.

CO

COROLLARIVM II.

Habetur secundò cylindricos in eadem altitudine existentes esse inter se, vt bases, quod de cæteris, veluti de supradictis, FE, GD E, ostendetur, quamuis aliter etiam id aliundè infra colligetur.

COROLLARIVM III.

Habetur tertiò, si non sint in supradictis duobus Theorematibus exposita duo parallelogramma, & duæ figuræ, sed vnum tantum, & vna figura in eadem basi, & altitudine cum ipso, cuius basi posita pro regula, & sumpto vtcunque puncto in vno laterum basi insistentium, perque ipsum basi ducta parallela, reperiatur eam, quæ intercipitur parallelogrammo ad eam, quæ intercipitur figura, vel figuras similes ab ipsis descriptas, tanquam homologis lineis, vel lateribus, esse vt vnam ex maximis abscissarum lateris, in quo sumptum est punctum, ad abscissam per ductam basi æquidistantem, vel vt istas adiuncta quadam recta linea, vel vt istarum figuras similes ab ipsis tanquam lineis, vel lateribus homologis descriptas, ita vt figuræ descriptæ à singulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ parallelogrammi, & dictæ figuræ, sint similes, vt pariter, quæ describuntur à singulis earum, quæ dicuntur maximæ abscissarum, vel abscissæ dicti lateris, quod adhuc dictæ magnitudines collectæ erunt proportionales: Vt ex. gr. si in Theorematis antecedentis figura habeamus tantum parallelogrammum, BF, & in eiusdem basi, EF, & eadem altitudine, figuram, BEF, & sumpto in vno laterum, BE, DF, vtcunque puncto, O, & per, O, ducta, OQ, parallela ipsi, EF, reperiamus, QO, ad, OP, esse vt, EB, ad, BO, vel figuras similes descriptas ab, OQ, OP, tanquam lineis, vel lateribus homologis, vt ex. gr. quadratum, QO, ad quadratum, OP, esse vt, EB, ad, BO, vel vt, EB, adiuncta quadam linea ad, BO, adiuncta eadem, vel vt ab istis descriptas similes figuras, dico collectas magnitudines, quæ comparantur esse proportionales: Nam si ipsi, BE, intelligatur applicatum parallelogrammum, AE, cuius basis sit, CE, in directum ipsi, EF, constituta, & CE, æqualis ipsi, EB, tunc omnes lineæ, AE, regula, CE, sunt æquales maximis abscissarum, BE, vt probatum est, & omnes abscissæ æquales omnibus lineis trianguli BCE, si sit iuncta, BC, (quæ secet, MO, in, X,) vnde vice earum, quæ dicuntur maximæ abscissarum, vel abscissæ ipsius, BE, rectè sumemus omnes lineas, AE, & trianguli, BCE, & ita reperiemus quadratum, QO, ad quadratum, OP, ex. gr. esse vt, MO, ad, OX, vel vt quadratum, MO, ad quadratum, OX,

Corol. 2. 19. huius.

OX, vel vt aliæ figuræ similes ab ipsis descriptæ, siue ab ipsis simplicibus, siue ab ipsis adiuncta quadam linea, vnde casus iste ad casum Theorematis præsentis, vel antecedentis deductus erit, & ideò patebit, omnes lineas, AE, ad omnes lineas trianguli, BCE, vel omnes figuras similes, AE, ad omnes figuras similes trianguli, BCE, idest vel maximas abscissarum, BE, ad abscissas omnes ipsius, BE, vel earum figuras similes esse, vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF. Vocabuntur autem istæ; Quatuor ordinum magnitudines collectæ iuxta quatuor magnitudines proportionales vtcunque inuentas, quæ fuerunt ex. gr. prima quadratum, OQ, secunda quadratum, OP, tertia, EB, quarta, BO, magnitudines autem collecta iuxta primam .s. ex. gr. omnia quadrata, BF, dicentur primi ordinis, collectæ verò iuxta secundam .s. omnia quadrata figuræ, BEF. magnitudines secundi ordinis, collectæ verò iuxta tertiam magnitudines tertij ordinis, & tandem collectæ iuxta quartam magnitudines quarti ordinis, sic igitur appellabimus hos quatuor magnitudinum ordines. In supradictis autem, quod dicimus de abscissis, idem intellige de residuis abscissarum, & quod de ipsis simplicibus, idem de eisdem adiunctis alijs, siue sint recti, siue eiusdem obliqui transitus: Hoc autem Corollarium præ cæteris summè animaduertendum est, ac memoriæ diligentissimè commendandum, ex hoc enim potissimas demonstrationes tanquam ex fonte deriuari studiosus in sequentium Librorum lectione facilè comprehendet.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

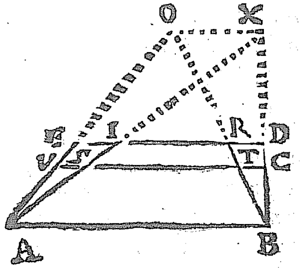
SI duo trapezia fuerint in eadem basi, sumpto vno late-
rum æquidistantium pro basi, & regula, & fuerint etiam
in eadem altitudine respectu illius basis, & latera basi paral-
lela fuerint æqualia, trapezia erunt æqualia, & omnia eo-
rundem quadrata erunt æqualia.

Sint duo trapezia, AERB, IABD, in eadem basi, AB, quæ
sit sumpta pro regula, cuiq; latera, ER, ID, sint parallela, & in-
ter se æqualia. Dico trapezia esse æqualia, & omnia eorundem qua-
drata esse æqualia. Producantur, AE, BR, donec sibi occurrant,
vt in, O, &, AI, BD, donec simul incidant, vt in, X, & iunga-
tur, OX, quia ergo, ER, parallela est ipsi, AB, erunt triangula, A
AOB, EOR, similia, & eadem ratione similia erunt triangula,
XB, IXD, ergo vt, AB, ad, ER, vel ad, ID, illi æqualem, ita
erit, BO, ad, OR, vt autem, AB, ad, ID, ita est, BX, ad, XD,
ergo vt, BO, ad, OR, ita est, BX, ad, XD, ergo, OX, paral-
lela

Iux. diff. 1. Sexti Element.

4. Sex. El.

lela eſt ipſi, E D. Ducatur intra trapezia parallela ipſi, A B, vtcunque, V C, ſecans, X A, in, S, &, O B, in, T, ſunt igitur triangula, A O B, V O T, ſimilia, & pariter ſunt ſimilia triangula, A X B, S X C, ergo, A B, ad, V T, erit vt, B O, ad, O T, .i. vt, B X, ad, X C, (quia, V C, parallela eſt ipſi, A B, & conſequenter ipſi, O X,) .i. vt, A B, ad, S C, ergo, V T, S C, erunt æquales, & eorum quadrata pariter æqualia, ſic autem de cæteris ipſi, A B, parallelis idem oſtendetur, ergo omnes lineæ trapezij, A E R B, erunt æquales omnibus lineis trapezij, A I D B, regula, A B, & conſequenter ipſa trapezia erunt æqualia, & omnia eorundem quadrata pariter æqualia, quod oſtendere opus erat.



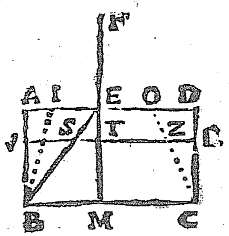
THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

SI parallelogrammum, & trapezium habuerint communem baſim vnum ęquidiſtantium laterum trapezij, quod ſit ſumptum pro regula; Omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata trapezij erunt, vt quadratum dictæ baſis ad rectangulum ſub parallelis lateribus trapezij, cum, $\frac{1}{3}$, quadrati differentiæ dictorum laterum æquidiſtantium.

Sit parallelogrammum, A C, & trapezium, I B C O, cuius laterum æquidiſtantium alterum, vt, B C, ſit communis baſis ipſi, & trapezio, & regula. Dico ergo omnia quadrata, A C, ad omnia quadrata trapezij, I B C O, eſſe vt quadratum, B C, ad rectangulum ſub, B C, I O, vna cum, $\frac{1}{3}$, quadrati differentiæ ipſarum, B C, I O. Sumatur in, D A, ipſa, E D, æqualis ipſi, I O, & iungatur, B E, & per, E, ipſis, A B, D C, parallela ducatur, E M: Omnia ergo quadrata trapezij, E B C D, per lineam, E M, diuiduntur in omnia quadrata trianguli, E B M, & in omnia quadrata, M D, & in rectangula ſub triangulo, E B M, &, E C, bis ſumpta; ad horum ergo ſingula comparemus omnia quadrata, A C. Igitur omnia quadrata, A C, ad om-

Per D. Coroll. 23. huius.

9. huius.



omnia quadrata, C E, ſunt vt quadratum, B C, ad quadratum, C
M, quod ſerua. Inſuper omnia quadrata, A C, ad omnia quadra- 9. huius.
ta, A M, ſunt vt quadratum, C B, ad quadratum, B M, item om-
nia quadrata, A M, ſunt tripla omnium quadratorum trianguli, E B 24. huius.
M, .i. ſunt ad illa, vt quadratum, B M, ad, $\frac{1}{3}$, quadrati, B M, er-
go, ex æquali, omnia quadrata, A C, ad omnia quadrata trianguli,
E B M, erunt vt, B C, ad, $\frac{1}{3}$, quadrati, B M, quod pariter ſerua. Tan- 14. huius.
dem omnia quadrata, A C, ad rectangula ſub, A M, M D, erunt vt
quadratum, B C, ad rectangulum, B M C, rectangula verò ſub, A Coroll. 1.
M, M D, ad rectangula ſub triangulo, E B M, & ſub, M D, ſunt vt, 26. huius.
A M, ad triangulum, E B M, (quia illa ſunt omnia rectangula parallelogrammi, A M, & trianguli, E B M, æquè alta, altitudinis nempè æqualis ipſi, M C, ſumpta regula, B M,) .i. dupla .i. vt rectangulum, B M C, ad eiuſdem dimidium, ergo, ex æquali, omnia quadrata, A C, ad rectangula ſub triangulo, E B M, & ſub, M D, erunt vt quadratum, B C, ad dimidium rectanguli, B M C, ad eadem verò bis ſumpta erunt, vt quadratum, B C, ad rectangulum, B M C, ergo, colligendo, omnia quadrata, A C, ad omnia quadrata, E C, ad omnia quadrata trianguli, E B M, & ad rectangula bis ſub triangulo, E B M, & ſub, E C, erunt vt quadratum, B C, ad quadratum, C M, cum rectangulo, C M B, &, $\frac{1}{3}$, quadrati, B M, ſed rectangulum, B M C, cum quadrato, M C, conficit rectangulum ſub, B C, C M, ergo omnia quadrata, A C, ad omnia quadrata trianguli, E B M, parallelogrammi, M D, & rectangula bis ſub eiſdem,
.i. ad omnia quadrata trapezij, E D C B, .i. ad omnia quadrata tra- Per D. Co
pezij, I B C O, (quia, O, E D, ſunt æquales) erunt, vt quadratum, roll. 23.
B C, ad rectangulum ſub, B C, C M, .i. ſub, B C, E D, vel, I O, huius.
vna cum, $\frac{1}{3}$, quadrati, B M, quę eſt differentia parallelarum, B C, E Ex antec.
D, ſiue, B C, I O, ipſius trapezij, I B C O, quod oſtendere opus erat.

COROLLARIVM.

PAtet autem ſi ipſi, M E adiungamus in directum, E F, æqualem ipſi, M C, & ſi ſupponamus, B M, æquari ipſi, M E, facillimè probari poſſe omnia quadrata, A C, æquari quadratis maximarum abſciſſarum ipſius, M E, adiuncta, E F, & omnia quadrata trapezij, E B C D, æquari quadratis omnium abſciſſarum, M E, adiuncta, E F, nam ex. gr. ducta ipſi, B C, parallela vtcunque, V R, quæ ſecet, E B, in, S, &, E M, in, T, patet, quod, V T, eſt æqualis ipſi, M E, &, T R, adiunctæ, E F, & ideò tota, V R, æqualis toti, M F; ſimiliter, S T, eſt æqualis ipſi, T E, &, T R, adiunctæ, E F, vnde patet, S R, æquari compoſitæ ex, T E, vna abſciſſarum, & adiuncta: Conſimiliter in cæteris fa-

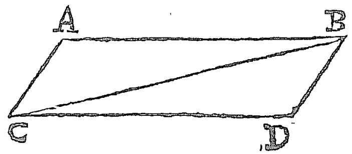
 cta

ẞa demonstratione propositum ostendemus; vnde patebit pariter quadrata maximarum abscissarum propositæ rectæ lineæ, vt ipsius, E M, adiuncta quadam, vt, E F, ad quadrata omnium abscissarum eiusdem adiuncta eadem, esse vt quadratum vnius maximarum abscissarum adiuncta iam dicta .i. vt quadratum compositæ ex proposita, & adiuncta, ad rectangulum sub hac composita, & sub adiuncta, vna cum, $\frac{1}{3}$, quadrati differentiæ huius compositæ, & adiunctæ .s. vt quadratum, M F, ad rectangulum sub, M F, F E, vna cum, $\frac{1}{3}$, quadrati, E M, quæ est differentia earundem, & est etiam proposita linea.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

CVIuſcunque parallelogrammi omnia quadrata regula vno laterum ad omnia quadrata eiuſdem regula altero laterum cum prædicto angulum continentium, erunt vt prima regula ad ſecundam.

Sit quodcunq; parallelogrammum, A D. Dico omnia quadrata eiuſdem, regula, D B, eſſe vt, C D, ad, D B: Omnia enim quadrata, A D, regula, C D, ad omnia quadrata, A D, regula, D B, ha-
13. huius. bent rationem compoſitam ex ea, quam habet quadratum, C D, ad quadratum, D B, & ex ea, quam habet, B D, ad, D C, (quia, B D, æqualiter inclinatur baſi, C D, ac, C D, ipſi baſi, D B, nam ſunt circa eun-
5. huius. dem angulum) .i. ex ea, quam habet quadratum, B D, ad rectangulum ſub, B D, D C, duæ autem rationes, nempè quadrati, C D, ad quadratum, B D, & quadrati, B D, ad rectangulum ſub, B
Diffin. 12. lib. 1. D, D C, componunt rationem quadrati, C D, ad rectangulum ſub, B D, D C, quę eſt eadem ei, quam habet, C D, ad, D B, ergo om-
5. huius. nia quadrata, A D, regula, C D, ad omnia quadrata eiuſdem, A D, regula, D B, erunt vt, C D, prima regula ad, D B, ſecundam, quod oſtendere opus erat.



COROLLARIVM.

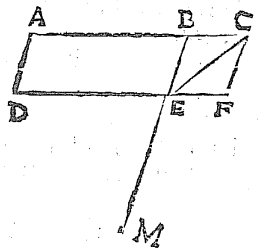
HInc patet, ſi iungamus, C B, omnia quadrata trianguli, C B D, regula, C D, ad omnia quadrata trianguli eiuſdem, regula, D B, eſſe vt, C D, primam regulam ad, D B, ſecundam; nam omnia quadrata trian-

triangulorum in eadem baſi, & altitudine cum parallelogrammis conſtitutorum ſunt omnium quadratorum dictorum parallelogrammorum ſubtripla, ſumpto communi latere pro regula, vt probatum eſt. 24. huius.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI intra parallelogrammum agatur à puncto baſis lateribus oppoſitis parallela, & conſtitutorum hinc parallelogrammorum vnius ducatur diameter: Rectangula ſub factis parallelogrammis ad rectangula ſub trapezio, & triangulo in toto parallelogrammo per dictam diametrum conſtitutis, regula baſi, habebunt eandem rationem, quam baſis parallelogrammi, in quo non ducitur diameter ad compoſitam ex, $\frac{1}{2}$, eiuſdem, &, $\frac{1}{6}$, baſis alterius: Rectangula verò ſub toto parallelogrammo, & ſub eo, in quo ducitur diameter, ad rectangula ſub dicto trapezio, & ſub triangulo, qui eſt trapezij portio, erunt vt baſis totius parallelogrammi ad compoſitam ex, $\frac{1}{2}$, baſis parallelogrammi, in quo non ducitur diameter, & ex, $\frac{1}{3}$, baſis alterius.

Sit ergo parallelogrammum, A F, in baſi, D F, quæ ſit regula, intra quam ſumptum ſit punctum, E, & per, E, ipſis, A D, C F, acta parallela, B E, ducatur autem in alterutro parallelogrammorum, A E, E C, vt in, E C, diameter, E C. Dico ergo rectangula ſub, A E, E C, ad rectangula ſub trapezio, A D E C, & triangulo, C E F, eſſe vt, D E, ad compoſitam ex, $\frac{1}{2}$, D E, &, $\frac{1}{6}$, E F. Rectangula enim ſub trapezio, A D E C, diuiſo per lineam, B E, & ſub triangulo, C E F, indiuiſo, æquantur rectangulis ſub, A E, & triangulo, C E F, vel triangulo, B E C, & rectangulis ſub triangulo, B E C, & triangulo, C E F, nunc patet rectangula ſub, A E, E C, ad rectangula ſub, A E, & triangulo, B C E, eſſe vt, B F, ad triangulum, ſt E C, .i. dupla .i. vt, D E, ad, $\frac{1}{2}$, D E, quod ſerua.



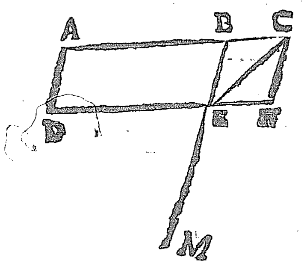
Per A. Coroll. 23. huius.

Corol. 1. 26. huius.

Item rectangula ſub, A E, E C, ad omnia quadrata, B F, ſunt vt rectangulum, D E F, ad quadratum, E F, .i. vt, D E, ad, E F, omnia verò quadrata, B F, ſunt ſexcupla rectangulorum ſub triangulis, 14. huius.

B E C, C E F, .i. ſunt ad illa, vt, E F, ad, $\frac{1}{6}$, eiuſdem, E F, ergo ex
Elicitur æquali, rectangula ſub, A E, E C, ad rectangula ſub triangulis, B E
ex. 34. huius. C, C E F, erunt vt, D E, ad, $\frac{1}{6}$, E F, eadem verò ad rectangula ſub,
A E, & triangulo, B E C, ſiue, C E F, oſtenſa ſunt eſſe, vt, D E,
ad, $\frac{1}{2}$, D E, ergo, colligendo, rectangula ſub, A E, E C, ad rectan-
gula ſub, A E, & triangulo, C E F, & ſub triangulo, B E C, & eo-
dem, C E F, .i. ad rectangula ſub trapezio, A D E C, & triangulo,
Per A. Coroll. 23. huius. C E F, erunt vt, D E, ad compoſitam ex, $\frac{1}{2}$, D E, &, $\frac{1}{6}$, E F, quę
eſt Theorematis prima pars.

Dico vlterius rectangula ſub, A F, F B, ad rectangula ſub trape-
zio, A D E C, & triangulo, B E C, eſſe vt, D F, ad compoſitam ex,
$\frac{1}{6}$, D E, &, $\frac{1}{3}$, E F; rectangula .n. ſub, A F, F B, ad rectangula ſub,
34. huius. A E, E C, ſunt vt rectangulum, D F E, ad rectangulum, D E F, .i.
7. huius. vt, F D, ad, D E, rectangula vero ſub, A E, E C, ad rectangula ſub,
A E, & triangulo, B E C, ſunt vt, B
Coroll. 1. 26. huius. F, ad triangulum, B E C, .i. dupla .i.
vt, D E, ad, $\frac{1}{2}$, ipſius, D E, ergo, ex
æquali rectangula ſub, A F, F B, ad
rectangula ſub, A E, & triangulo, B
E C, erunt vt, F D, ad, $\frac{1}{2}$, D E, quod
ſerua. Item rectangula ſub, A F, F B,
34. huius. 7. huius. 24. huius. ad omnia quadrata, B F, ſunt vt re-
ctangulum, D F E, ad quadratum, F
E, .i. vt, D F, ad, F E: Omnia verò
quadrata, B F, ſunt tripla omnium



quadratorum trianguli, B E C, .i. ſunt vt, F E, ad, $\frac{1}{3}$, F E, ergo ex
æquali rectangula ſub, A F, F B, ad omnia quadrata trianguli, B E
C, ſunt vt, D F, ad, $\frac{1}{3}$, F E, erant autem eadem ad rectangula ſub,
A E, & triangulo, B E C, vt, D F, ad, $\frac{1}{2}$, D E, ergo, colligendo,
rectangula ſub, A F, F B, ad rectangula ſub, A E, & triangulo, B E
C, vna cum omnibus quadratis trianguli, B E C, .i. ad rectangula
Per C. Coroll. 23. huius. ſub trapezio, A D E C, & triangulo, B E C, erunt vt, D F, ad com-
poſitam ex, $\frac{1}{2}$, D E, &, $\frac{1}{3}$, E F, quę eſt Theorematis ſecunda pars;
hæc autem erant demonſtranda.

C O R O L L A R I V M.

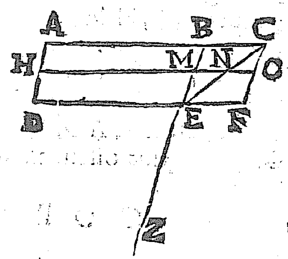
*Colligimus autem ex hoc Theoremate rectangula ſub maximis ab-
ſciſſarum propoſitæ lineæ, adiunctis eiſdem tot vni cuidam æquali-
bus, ad rectangula ſub omnibus abſciſſis eiuſdem adiuncta iam dicta li-
nea, & ſub reſiduis abſciſſarum eiuſdem, eſſe vt adiuncta ad compoſitam
ex, $\frac{1}{2}$, adiunctæ, &, $\frac{1}{2}$, propoſitæ lineæ, & hoc ex prima parte huius
Theo-*

*Theorematis, nám, vt alibi oſtendimus, ſi ſupponamus ipſi, B E, adiun-
gi rectam, E M, æqualem ipſi, D E, &, B E, eſſe æqualem ipſi, E F, om-
nes lineæ trapezij, A D E C, erunt æquales omnibus abſciſſis ipſius, B E,
(quæ ſit propoſita linea) adiuncta tamen, E M, & omnes lineæ triangu-
li, C E F, (intellige ſemper regulam, D F,) erunt æquales reſiduis om-
nium abſciſſarum propoſitæ lineæ, B E, item omnes lineæ, A E, erunt
æquales ijs, quæ adiunguntur maximis abſciſſarum, B E, nam earum ſin-
gulæ ſunt æquales ipſi, D E, vel, E M, & omnes lineæ, E C, maximis
abſciſſarum, B E, pariter æquales erunt, vnde patet propoſitum. Ex ſe-
cunda verò parte conſimili ratione colligemus rectangula ſub maximis
abſciſſarum propoſitæ lineæ, vt, B E, adiuncta quadam, vt, E M, &
ſub maximis abſciſſarum eiuſdem propoſitæ, B E, ad rectangula ſub om-
nibus abſciſſis, ſumptis verſus, E, eiuſdem propoſitæ, B E, adiuncta,
E M, & ſub eiuſdem omnibus abſciſſis propoſitæ, B E, eſſe vt compoſita
ex propoſita, & adiecta .ſ. vt, B M, ad compoſitam ex, $\frac{1}{2}$, adiectæ, quæ
eſt, M E, &, $\frac{1}{3}$, propoſitæ, quæ eſt, B E.*

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

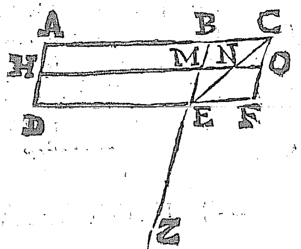
Expoſita Propoſit. antecedentis figura, & intra parallelas,
A C, D F, eiſdem æquidiſtanter ducta recta linea, H
O, quæ ſecet, B E, in, M, &, C E, in, N, oſtendemus, re-
gula eadem, D F, rectangula ſub parallelogrammis, A O, O
B, ad rectangula ſub trapezijs, H A C N, M B C N, eſſe vt
rectangulum, H O M, ad rectangulum ſub, H O, M N, cum
rectangulo ſub compoſita ex, $\frac{1}{2}$, H M, &, $\frac{1}{2}$, N O, & ſub, N O.

Rectangula enim ſub parallelogram-
mis, A O, O B, ad rectangula ſub paral-
lelogrammis, A M, M C, ſunt vt re- 5. huius.
ctangulum, H O M, ad rectangulum,
H M O, rectangula verò ſub, A M, M Coroll. 1. 26. huius.
C, ad rectangula ſub parallelogrammo,
A M, & trapezio, B M N C, ſunt vt, B 20. huius.
O, ad trapezium, B M N C, .i. vt, M O,
ad, M N, cum, $\frac{1}{2}$, N O, vel vt rectan- 5. huius.
gulum, H M O, ad rectangulum ſub, H
M, & ſub compoſita ex, M N, &, $\frac{1}{2}$, N



O, ergo, ex æquali, rectangula ſub, A O, O B, ad rectangula ſub,
A M, & trapezio, B M N C, ſunt vt rectangulum, H O M, ad rectan-
gulum ſub, H M, & compoſita ex, M N, &, $\frac{1}{2}$, N O, quod ſerua.
In-

Insuper rectangula sub, A O, O B, ad omnia quadrata, O B, sunt
24.huius. vt rectangulum, H O M, ad quadratum, O M, & omnia quadrata,
O B, ad omnia quadrata trapezij, B M N C, sunt vt quadratum, O
28.huius. M, ad rectangulum, O M N, cum, $\frac{1}{3}$, quadrati, N O, ergo, ex æ-
quali rectangula sub, A O, O B, ad omnia quadrata trapezij, B M
N C, sunt vt rectangulum, H O M, ad rectangulum, O M N, cum,
$\frac{1}{3}$, quadrati, N O, ostensa sunt autem rectangula sub, A O, O B, ad
rectangula sub, A M, & trapezio, B M N C, esse vt rectangulum,
H O M, ad rectangulum sub, H M, & composita ex, M N, &, $\frac{1}{2}$,
N O, ergo, colligendo, rectangula sub,
A O, O B, ad rectangula sub, A M, &
trapezio, B M N C, cum omnibus



Per C. Corol. 23. huius. quadratis eiusdem trapezij, idest ad re-
ctangula sub trapezijs, A H N C, B M
N C, erunt vt rectangulum, H O M,
ad rectangulum sub, H M, & compo-
sita ex, M N, &, $\frac{1}{2}$, N O, vna cum re-
ctangulo sub, O M, &, M N, &, $\frac{1}{3}$,
quadrati, N O, rectangulum autem
sub, H M, & composita ex, M N, &,
$\frac{1}{2}$, N O, diuiditur in rectangula sub, H
M, &, M N, & sub, H M, &, $\frac{1}{2}$, N O, si ergo iunxeris rectangulum
1. Secundi Elem. sub, H M, M N, cum rectangulo sub, O M, M N, fiet rectangulum
sub tota, H O, & sub, M N, & remanebit rectangulum sub, H M,
& sub, $\frac{1}{2}$, N O, cum, $\frac{1}{3}$, quadrati, N O, idest cum rectangulo sub,
7. huius. N O, &, $\frac{1}{3}$, N O, est autem rectangulum sub, H M, &, $\frac{1}{2}$, N O,
æquale rectangulo sub, $\frac{1}{2}$, H M, & sub, N O, hoc ergo si iunxeris
rectangulo sub, N O, &, $\frac{1}{3}$, N O, conficiemus rectangulum sub com-
posita ex, $\frac{1}{2}$, H M, &, $\frac{1}{3}$, N O, & sub, N O, totum igitur conse-
quens iam dictum diuisum est in hæc duo rectangula, nempè vnum
sub, H O, M N, aliud sub composita ex, $\frac{1}{2}$, H M, &, $\frac{1}{3}$, N O, &
sub, N O; ad hæc ergo simul sumpta rectangulum, H O M, erit vt
rectangula sub, A O, O B, ad rectangula sub trapezijs, A H N C, B
M N C, quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc etiam patet, si supponamus, F E, esse æqualem ipsi, E B, & ipsi,
E B, in directum adiunctam ipsam, E Z, sumamus tamen cum,
E Z, ipsam, E M, ex quibus conficiamus, M Z, adiunctam maximis ab-
Vt in Cor. 21. huius. scissarum, vel abscissis ipsius, B M, propositæ vtcunque lineæ, quod fa-
cilè ostendemus omnes lineas parallelogrammi, A O, æquari maximis
ab-

abscissarum, B M, adiuncta, M Z, & omnes lineas, B O, æquari ma-
ximis abscissarum, B M, adiuncta, M E, & omnes lineas trapezij, A
H N C, æquari omnibus abscissis, B M, adiuncta, M Z, & omnes lineas
trapezij, B M N C, æquari omnibus abscissis ipsius, B M, adiuncta, M
E, quorum exemplum patere potest in recta, H O, in qua, H O, æquatur
ipsi, B Z, &, H N, ipsi, M Z, &, M N, ipsi, M E, æquari autem su-
pradicta sic intellige, vt semper cuilibet assumptæ in parallelogrammo,
A O, reperiatur sibi æqualis respondens in recta, B Z, & sic cuilibet as-
sumptæ in trapezijs iam dictis, reperiatur illi æqualis correspondens in
recta, B Z, quæ erit vna abscissarum, B M, adiuncta, M Z, vel, M E,
ea nempè, quæ terminatur ad idem punctum, per quod transit ea, quæ
æquidistat ipsi, D F, & cum eadem comparata illi reperitur æqualis (sic
autem intellige in cæteris, cum dicimus omnes lineas alicuius figuræ,
quæ est parallelogrammum, vel trapezium, vel triangulum æquari om-
nibus abscissis, vel maximis, vel residuis omnium abscissarum alicuius
lineæ, adiuncta, vel non adiuncta aliqua linea.) Rectangula ergo sub
maximis abscissarum, B M, adiuncta, M Z, & sub maximis abscissarum,
B M, adiuncta, M E, ad rectangula sub omnibus abscissis, B M, adiun-
cta, M Z, & sub omnibus abscissis, B M, adiuncta, M E, erunt vt re-
ctangulum sub, H O, O M, idest sub, Z B, B E, ad rectangulum sub, H
O, M N, vnà cum rectangulo sub composita ex, $\frac{1}{2}$, H M, &, $\frac{1}{3}$, N O,
& sub, N O, idest ad rectangulum sub, Z B, M E, vna cum rectangulo
sub composita ex, $\frac{1}{2}$, Z E, &, $\frac{1}{3}$, M B, & sub, M B.

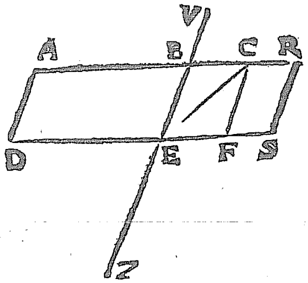
THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

Exposita adhuc antecedentis Theorematis figura, si ipsi,
E F, ad punctum, F, iungatur in directum quædam re-
cta linea, vt, F S, & compleatur parallelogrammum, F R, re-
gula sumpta, D S, ostendemus rectangula sub, A E, E R, ad
rectangula sub trapezijs, A D E C, C E S R, esse vt rectan-
gulum, D E S, ad rectangulum sub, D E, & composita ex, S
F, &, $\frac{1}{2}$, F E, vna cum rectangulo sub, E F, & composita ex,
$\frac{1}{6}$, E F, &, $\frac{1}{2}$, F S.

Rectangula enim sub, A E, E R, ad rectangula sub, A E, & tra- Coroll. 1. 26. huius.
pezio, C E S R, sunt vt, E R, ad trapezium, C E S R, .i. vt, E S,
ad, S F, cum, $\frac{1}{2}$, F E, .i. sumpta, D E, communi altitudine, vt re-
ctangulum, D E S, ad rectangulum sub, D E, & sub composita ex, 20. huius. 5. huius.
S F, &, $\frac{1}{2}$, F E, quod serua.

In-

Insuper rectangula sub, A E, E R, ad rectangula sub, B F, F R,
24. huius. sunt vt rectangulum, D E S, ad rectangulum, E F S; item rectangula sub, B F, F R, ad rectangula sub triangulo, B E C, & trapezio, C E S R, sunt vt, F S, ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, S F, &, $\frac{1}{6}$, F E, idest
20. huius. sumpta, E F, communi altitudine, vt rectangulum, E F S, ad rectangulum sub, E F, & composita ex,
5. huius. $\frac{1}{6}$, E F, &, $\frac{1}{2}$, F S, ergo ex æquali rectangula sub, A E, E R, ad rectangula sub triangulo, B E C, & trapezio, C E S R, erunt vt rectangulum, D E S, ad rectangulum sub, E F, & composita ex, $\frac{1}{6}$, E F, &, $\frac{1}{2}$, F S; erant autem eadem rectangula sub, A E, E R, ad rectangula sub, A E, & trapezio, C E S R, vt idem rectangulum, D E S, ad rectangulum sub, D E, & composita ex, S F, &, $\frac{1}{2}$, F E, ergo, colligendo, rectangula sub, A E, E R, ad rectangula sub, A E, & trapezio, C E S R, & sub triangulo, B E C, & eodem trapezio, C E S R, .i.
Per A. ad rectangula sub trapezio, A D E C, & trapezio, C E S R, erunt
Corol. vt rectangulum, D E S, ad rectangulum sub, D E, & composita ex,
23. huius. S F, &, $\frac{1}{2}$, F E, vna cum rectangulo sub, E F, & composita ex, $\frac{1}{6}$, E F, &, $\frac{1}{2}$, F S, quod ostendere opus erat.



COROLLARIVM.

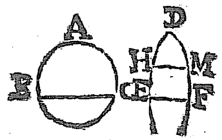
Corol.
30. huius. *QVoniam verò si supponamus, F E, esse æqualem ipsi, E B, facile modo vsitato ostendemus omnes lineas trapezij. A D E C, æquari residuis omnium abscissarum, B E, sumptis versus, E, adiunctæ, E Z, & omnes lineas trapezij, C E S R, æquari omnibus abscissis, E B, adiuncta recta linea æquali ipsi, F S, ad punctum, B, quæ sit, B V, & omnes lineas, A E, æquari tot æqualibus adiunctæ, Z E, quot sunt omnes abscissæ, B E, & omnes lineas, E R, æquari maximis abscissarum, E B, adiuncta, B V, ideò rectangula sub istis erunt etiam æqualia rectangulis sub dictis trapezijs, & parallelogrammis, vnde proposita vtcunq; linea, V Z, eaq; vtcunq; secta in duobus punctis, B, E, patebit rectangula sub tot æqualibus, Z E, quot sunt omnes abscissæ, siue maximæ abscissarum, E B, & sub maximis abscissarum, E B, adiuncta, B V, ad rectangula sub residuis omnium abscissarum, B E, adiuncta, E Z, & sub omnibus abscissis, E B, adiuncta, B V, esse vt rectangu-*

lum, D E S, ad rectangulum sub, D E, & composita ex, S F, &, $\frac{1}{2}$, F E, vna cum rectangulo sub, E F, & composita ex, $\frac{1}{6}$, E F, &, $\frac{1}{2}$, F S .i. vt rectangulum, Z E V, quod est vnum rectangulorum maximis æqualium, ad rectangulum sub, Z E, & sub composita ex, V B, &, $\frac{1}{2}$, B E, vnæ cum rectangulo sub, E B, & composita ex, $\frac{1}{6}$, E B, &, $\frac{1}{2}$, B V, regulam autem hic pariter suppone ipsam, D S, & abscissas, residuas & maximas abscissarum tum hic, tum in supradictis, & sequentibus, nisi aliud dicatur, semper intellige, vel recti, vel ei usdem obliqui transitus, recti Iux. diff. 1.
nempè, cum parallelogramma sunt rectangula. obliqui autem, cum huius.
non fuerint rectangula, cum diffinitiones de his allatas.

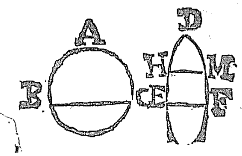
THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

EXpositis duabus vtcunq; figuris planis, & in earum vnaquaque sumpta vtcumque regula, vt omnia quadrata earumdem figurarum sumpta iuxta dictas regulas, ita erunt solida quæcumq; ad inuicem similaria ex eisdem figuris genita iuxta easdem regulas.

Sint duæ vtcunque figuræ planæ, A B C, D E F, in quibus duæ vtcunque sint sumptæ regulæ, B C, E F, rectæ lineæ. Dico igitur, vt omnia quadrata figuræ, A B C, regula, B C, ad omnia quadrata figuræ, D E F, regula, E F, ita esse solidum similare quodcunque genitum ex figura, A B C, iuxta regulam, B C, ad sibi similare ge- Vide B.
nitum ex figura, D E F, iuxta regulam, E F. Ducatur in altera di- Definit. 8.
ctarum figurarum, vt in, D E F, vtcumque regulæ, E F, parallela, huius.
H M, quia ergo quadrata habent inter se duplam rationem laterum, a quibus describun- 8. & 15.
tur, ideò quadratum, E F, ad quadratum, huius.
H M, habebit duplam rationem eius, quam habet, E F, ad, H M, sed etiam aliæ duæ quæcumque figuræ planę similes ab eisdem
tanquam lineis, vel lateribus homologis ea- 13. huius.
rumdem descriptę habent duplam rationem earumdem, ergo, vt quadratum, E F, ad quadratum, H M, ita erit alia quælibet figura plana descripta ab, E F, ad similem sibi descriptam ab, H M, ita vt, E F, H M, sint earum homologæ, &, permutando, quadratum, E F, ad aliam figuram descriptam ab, E F, erit vt quadratum, H M, ad figuram prædictę similem ab, H M, descriptam. Sic etiam esse ostendemus quadratum cuiuscumque in figura, D E F, ductæ ipsi, E F, æquidistan-



tis, ergo, vt vnum ad vnum, sic omnia ad omnia .i. vt quadratum,
Coroll. 4. huius. E F, ad figuram aliam quamcumq; descriptam ab, E F, sic erunt omnia quadrata figuræ, D E F, regula, E F, ad omnes figuras similes eiusdem figuræ, D E F, regula eadem, E F, similes inquam descriptæ ab, E F, vt autem quadratum, E F, ad figuram descriptam ab, E F, ita quadratum, B C, ad figuram, quę describitur à, B C, similis ei, quę descripta est ab, E F, ita vt describentes sint earumdem homologę, vt autem quadratum, B C, ad figuram descriptam à, B C, sic esse ostendemus omnia quadrata figuræ, A B C, regula, B C, ad omnes figuras similes eiusdem figurę, A B C, similes inquam descriptæ à, B C, vel ab, E F, eodem modo, quo id ostendimus in figura, D E F, ergo omnia quadrata figurę, A B C, ad omnes figuras similes alias quascunque eiusdem figuræ, A B C, erunt, vt omnia quadrata figuræ, D E F, ad omnes figuras similes prædictis eiusdem figuræ, D E F, regulis prædictis, B C, E F, ergo permutando, vt omnia quadrata figuræ, A B C, ad omnia quadrata figurę, D E F, ita erunt omnes figuræ similes quæcumque figurę, A B C, ad omnes figuras similes prædictis figuræ, D E F, quia verò omnes figuræ similes alicuius figuræ planæ regula quadam sumptæ, sunt omnia plana solidi, quod dicitur similare, & genitum ex tali figura iuxta eandem regulam, ideò, vt omnes figurę



B. Diff. 8. huius. similes quæcumque ipsius figuræ, A B C, regula, B C, ad omnes figuras similes ipsius figuræ, D E F, regula, E F, similes inquam prædictis .i. vt omnia quadrata figuræ, A B C, regula, B C, ad omnia quadrata figuræ, D E F, regula, E F, ita erunt omnia plana solidi similaris cuiuscumque geniti ex figura, A B C, iuxta regulam, B C, ad omnia plana solidi similaris geniti ex figura, D E F, iuxta regulam, E F, vt autem omnia plana duorum solidorum sic & ipsa solida, ergo etiam solida similaria genita ex figuris, A B C, D E F, (quę sunt similaria ad inuicem, quia omnes figuræ similes figuræ, A B C, sunt etiam similes omnibus figuris similibus figuræ, D E F,) iuxta regulas, B C, E F, erunt ad inuicem, vt omnia quadrata earumdem figurarum eisdem regulis sumpta, quod erat ostendendum.

Postulatũ 3. huius.

3. huius.

COROLLARIVM I.

Hinc patet, si in figura, A B C, vtcumq; regula, B C, descripserit duas quascumque figuras, quod vt vna ad aliam, ita erunt omnes figuræ ipsius, A B C, similes vni descriptarum ad omnes figuras eiusdem similes alteri descriptarum .i. ita omnia plana solidi similaris geniti ex, A B C, iuxta regulam, B C, (similibus existentibus eiusdem figuris vni descriptarum) ad omnia plana solidi similaris geniti ex eadem figura iuxta eandem regulam (huius similibus existentibus figuris alteri descriptarum) idest ita erunt solida similaria genita ex eadem figura, A B C, iuxta communem regulam, B C, non tamen similaria ad inuicem, sed, quarum omnia plana sunt omnes figuræ similes eiusdem, A B C, similes inquam, quæ sunt vnius dictorum solidorum vni descriptarum à, B C, figurarum, & quæ sunt alterius, similes alteri descriptarum figurarum.

COROLLARIVM II.

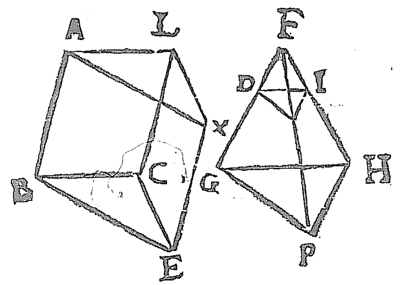
Vnde solida similaria, sed non ad inuicem, genita ex. gr. à figuris, A B C, D E F, iuxta regulas, B C, E F, quæ duas figuras planas dissimiles descripserint, quibus sint similes figuræ, quæ dicuntur omnia plana dictorum similarium solidorum, erunt ad inuicem, vt ipsæ figuræ dissimiles descriptæ ab ipsis, B C, E F, nam solidum similare genitum ex, D E F, iuxta regulam, E F, ad sibi similare genitum ex figura, A B C, iuxta regulam, B C, erit vt figura descripta ab, E F, ad sibi similem figuram descriptam à, B C, item solidum hoc similare genitum ex figura, A B C, iuxta regulam, B C, ad solidum similare, sed non sibi, genitum ex eadem figura iuxta eandem regulam, B C, erit vt figura descripta à, B C, similis descriptæ ab, E F, ad figuram sibi dissimilem descriptam ab eadem, B C, (quibus figuris dissimilibus sint similes figuræ, quæ dicuntur omnia plana solidorum similarium genitorum ex eadem figura, A B C, iuxta communem regulam, B C,) ergo, ex æquali solidum similare genitum ex figura, D E F, ad solidum similare, sed non sibi, genitum ex figura, A B C, (genita intellige iuxta regulas, E F, B C,) erit vt figura descripta ab, E F, cui sunt similes figuræ huius solidi, ad figuram descriptam à, B C, prædictæ dissimilem, cui sunt similes figuræ solidi ex, B A C, geniti iuxta regulam, B C.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

Solida similaria genita ex parallelogrammis iuxta regulam vnum eorundem laterum, sunt cylindrici; & solida similaria genita ex triangulis iuxta regulam vnum eorundem laterum, sunt conici, quorum bases erunt figuræ à regulis descriptæ, & latera, eorundem parallelogrammorum, vel triangulorum latera regulis insistentia.

Sit ergo expositum quodcumq; parallelogrammum, A C, & triangulum, F G H, in quibus pro regulis sumantur latera, B C, G H. Dico solidum quodcumq; similare genitum ex parallelogrammo, A C, (iuxta regulam, B C,) esse cylindricum, cuius basis erit à, B C, descripta figura, & latus, vtrumuis ipsorum, A B, L C, laterum regulæ, B C, insistentium; Et genitum ex triangulo, F G H, iuxta regulam, G H, esse conicum, cuius basis erit à, G H, descripta figura, & latus vtrumuis duorum, F G, F H, regulæ, G H, insistentium. Describantur à regulis, B C, G H, figuræ vtcunque planæ, B C E, G H P, æqualiter inclinatę planis, A C, F G H, deinde per circuitum figuræ, B C E, feratur latus, A B, cui sit æquale latus, E X, quodque punctum, A, describat circuitum figuræ, A X L, & per circuitum figuræ, G H P, feratur vtrumuis laterum, F G, F H, indefinitè productum versus figuram, G H P, cuius portio inter, F, & punctum, P, sit, F P, erit ergo solidum quod clauditur superficie cylindrica, descripta latere, A B, & duabus figuris, A L X, B C E, cylindricus; & quod clauditur superficie conica descripta altero laterum, F G, F H, indefinitè producto, & figura, G H P, erit conicus.

Ex def. 3. & 4. lib. 1.



Dico autem solidum similare genitum ex, A C, iuxta regulam, B C, cuius omnia plana sint omnes figuræ ipsius, A C, similes figuræ, B C E, esse hunc cylindricum, A C E, nam quælibet earum, quæ dicuntur omnes figuræ similes parallelogrammi, A C, regula, B C, similes inquam figuræ, B C E, est etiam similiter posita, ac, B C E, descripta latere homologo ipsi, B C, igitur eius perimeter erit in superficie cylindrica descripta latere, A B, si enim aliquid eius esset intra, vel extra illam superficiem, aliquid eius esset intra, vel extra illam superficiem, aliquid eius esset intra, vel extra illam superficiem, aliquid eius esset intra, vel extra com- tra, vel extra illam superficiem, aliquid eius esset intra, vel extra communem sectionem talis assumptę figurę, & superficiei cylindricę, talis autem communis sectio est perimeter figuræ similis, & similiter positę, ac, B C E, (quia si cylindricus plano secetur basi æquidistante concepta figura erit similis, & similiter posita, ac basis) ergo haberemus duas figuras ab eodem latere homologo descriptas, similes æquales, & similiter positas, & non congruentes, quod est absurdum, congruent igitur, erit ergo assumpta figura, quæ est vna earum, quę dicuntur omnes figurę parallelogrammi, A C, similes ipsi, B C E, regula, B C, & est vnum eorum, quæ dicuntur omnia plana solidi similaris geniti ex, A C, iuxta regulam, B C, erit, inquam, assumpta figura etiam vnum eorum, quæ dicuntur omnia plana cylindrici, A C E, regula, B C E, quod etiam de cæteris simili modo ostendetur, ergo solidum similare genitum ex, A C, iuxta regulam, B C, & cylindricus, A C E, habebunt omnia plana (regula assumpta) communia, ergo solidum similare genitum ex, A C, iuxta regulam, B C, erit idem cylindrico, A C E, cuius basis figura, B C E, & latus alterum laterum, A B, L C. Similiter ostendemus solidum similare genitum ex triangulo, F G H, iuxta regulam, G H, esse idem conico, F G H P, cuius latus alterum laterum, F G, F H, & basis est figura, G H P, consimili via supradictæ procedentes, quę erant demonstranda.

A. def. 8. huius.

Corol. 12. lib. 1.

Corollar. 25. l. 1.

COROLLARIVM I.

Hinc manifestum est, si figuræ descriptæ à, B C, G H, sint circuli, quod solidum similare genitum ex, A C, erit cylindrus, & genitum ex triangulo, F G H, conus siue recti, siue scaleni, si verò descriptæ figuræ sint rectilineæ, genitum ex, A C, erit prisma, ex, F G H, autem pyramis, siue recta, siue scalena cętera autem nomine communi vocantur solida similaria genita ex eisdem fig. iuxta regulas, intellige, B C, G H.

COROLLARIVM II.

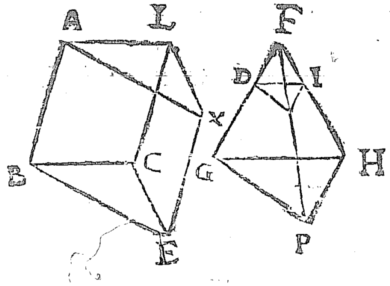
Si intra triangulum, F G H, ducamus ipsi, G H, parallelam vtcunq; quæ sit, D I, abscindens à triangulo, F G H, trapezium, D H, ostendemus eodem modo, quo supra, solidum similare genitum ex trapezio, D H, iuxta regulam, G H, esse frustum solidi similaris geniti ex triangulo, F G H, iuxta eandem regulam, idest frustum conici, F G H P, siue coni, cum figura descripta à, G H, est circulus, vel frustum pyramidis rectæ, siue scalenæ, cum illa est figura rectilinea, quæ facilè ostendentur. B. def. 4. l. 1.

COROLLARIVM III.

Tandem patet vice versa, si quiuis cylindricus, vel conicus, vel eius frustum, intelligatur secari per latera, de illo plano secante conceptam in secto solido figuram esse genitricem earumdem per descriptionem similium figurarum, & ipsa esse solida similaria genita ex eisdem figuris genitricibus iuxta regulas communes sectiones planorum secan- 13. l. 1. & Cor. 1. l. 1.

Cor.6. 16.lib.1.

secantium, & basium, quæ figuræ genitrices in cylindricis erunt parallelogramma in conicis triangula, & in frustis conicis trapezia; igitur verum est quodlibet solidum similare genitum ex parallelogrammo iuxta regulam vnum laterum esse cylindricum, & genitum ex triangulo iuxta regulam vnum laterum esse conicum, & ex trapezio esse frustum conicum; & vice versa, quemlibet cylindrum esse solidum similare genitum ex parallelogrammo in ipso producto per planum per latera ductum, genitum inquam iuxta communem sectionem eius, & basis cylindrici; & quemlibet conicum esse solidum similare genitum ex triangulo in eodem producto per traiectionem plani per latera, genitum, inquam iuxta communem sectionem eius, & basis dicti conici; & quodlibet frustum conicum esse solidum similare genitum ex trapezio in ipso producto per traiectionem plani per latera eiusdem frusti, genitum inquam iuxta regulam communem sectionem eius, & vnius basium eiusdem: Siue ergo, exposito parallelogrammo, & triangulo intellexeris iuxta diffin. 8. huius, describi omnes figuras similes eis quæ describuntur à basibus dicti parallelogrammi, & trianguli, & sic conceperis effici solidum, cuius illæ sunt omnia plana;



Diff. 3. & 4.lib.1.

siue intellexeris latus dicti parallelogrammi, vel trianguli indefinitè productum reuolui per circuitum figurarum à basibus descriptarum, vt habeas solidum dicta superficie descripta, & basi, vel basibus comprehensum, idem vtroque modo tibi obuenit solidum, potest autem prior vocari generatio solidorum per descriptionem figurarum; posterior autem, generatio solidorum per reuolutionem facta, quæ maioris dilucidationis gratia hic apposui, vt ex hac declaratione aliqualiter pateat, in plurimis etiam alijs vtramq; generationem ritè nos imaginari posse, vt in sphera, sphæroide, & conoidibus, & eiusdem frustis, & alijs quamplurimis, vt suo loco animaduertetur.

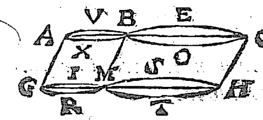
A. COROLLARII IV. GENERALIS.

SECTIO I.

ET quoniam, vt ostensum est Prop. 33. huius Libri, vt omnia quadrata duarum figurarum inter se sumpta cum datis regulis, ita sunt solida similaria genita ex ijsdem figuris iuxta easdem regulas, ideò cum in Propositionibus huius Libri inuenta est ratio omnium quadratorum parallelogrammorum, vel triangulorum, vel trapeziorum, regulis eorum lateribus, eandem rationem comperiemus habere solida similaria genita ex parallelogrammis, idest cylindricos, vel ex triangulis, idest conicos, vel ex trapezijs, idest frusta conica, genita inquam iuxta easdem regulas, quæ amplius dilucidabimus singula, quæ opportuna fuerint, Theoremata denuò assumentes.

B. SECTIO II.

IN Propos. 9. igitur exposita denuò eius figura, intelligantur bases, GM, MH, describere similes figuras planas, quæ sint, GIMR, MTHS, vt eorum lineæ, vel latera homologa, æquè erectas planis, AM, MC, & in ijs, tanquam in basibus consistere cylindricos, AM, BH, quorum latera sint, AG, CH, erunt igitur hi cylindrici solida similaria genita ex parallelogrammis, AM, MC, iuxta regulas, GM, MH, igitur erunt, vt omnia quadrata eorundem regulis eisdem, GM, MH, sunt autem omnia eorum quadrata, vt quadrata basium, GM, MH, ergo cylindrici, AM, MC, erunt vt quadrata basium, GM, MH, .i. vt figuræ similes, GIMR, MSHT, igitur cylindrici in eadem altitudine, & similibus basibus insistentes sunt, vt ipsæ bases.



Coroll. 3. ant.

9. huius.

C. SECTIO III.

IN Propos. 10. consimiliter procedentes colligemus, cylindricos in eadem, vel æqualibus, ac similibus basibus consistentes esse, vt altitudines, vel vt latera æqualiter eorundem basibus inclinata.

D. SECTIO IV.

IN Propos. 11. deducemus cylindricos similibus basibus insistentes habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel laterum æqualiter dictis basibus inclinatorum.

E. SECTIO V.

IN Propos. 12. colligemus cylindricos, quorum similes bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocè respondent, esse æquales; & cylindricos æquales, similibus basibus insistentes, bases habere altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas.

F. SECTIO VI.

IN Prop. 13. habebimus similes cylindricos esse in tripla ratione laterum homologorum.

G. SECTIO VII.

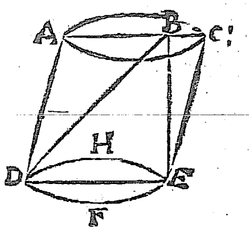
EX Prop. 14. colligimus si prædicti cylindrici insistant basibus dissimilibus, adhuc prædictas passiones de ipsis verificari; in quibus tamen non numerantur similes cylindrici, cum oporteat eosdem similes bases habere.

H. SECTIO VIII.

IN Prop. 22. habemus in eius figura, solida similaria genita ex parallelogrammis, AS, Tβ, iuxta regulas, ES, Zβ, eandem rationem habere ad solida similaria genita ex triangulis, OES, & Zβ, idest
Ex hac Propos. cylindricos genitos ex, AS, Tβ ad conicos genitos ex triangulis, OES, & Zβ, eandem rationem habere, vnde, cum conici sint partes proportionales cylindricorum in eadem altitudine cum ipsis existentium, quæcunq; de cylindricis in huius Coroll. Sectionibus 2. 3. 4. 5. 6. & 7. collecta sunt, eadem & pro conicis tamquam collecta recipiemus.

I. SECTIO IX.

IN Propos. 24. habemus quemcumque cylindricum esse triplum conici in eadem basi, & altitudine cum ipso. Sit expositus quicunq; cylindricus, AE, in basi, DHEF, in eadem autem basi, & altitudine sit conicus, DBE, sic tamen basi insistens, vt ducto plano per latera conici, idem transeat per latera cylindrici, AE, sit autem ductum tale planum, quod faciat in conico, DBE, triangulum, DBE, & in cylindrico, AE, parallelogrammum, AE, erunt igitur, AE, & triangulum, DBE, genitrices figuræ eorumdem solidorum, quæ similaria ad inuicem Cor. 6. & 16. lib. 1. vocantur, genita iuxta communem regulam, Corol. 3. 34. huius. DE, quod ergo gignitur ex, AE, ad genitum ex triangulo, DBE, erit vt omnia quadrata, AE, ad omnia quadrata trianguli, DBE, regula, DE, idest triplum, solidum verò similare genitum ex, AE, iuxta regulam, DE, 24. huius. cuius figuræ sint similes figuræ, DFEH, est cylindricus, AE, & solidum similare genitum ex triangulo, DBE, iuxta regulam, DE, cuius figuræ sint similes pariter figuræ, DFEH, est conicus, DBE, ergo cylindricus, AE, triplus erit conici, DBE, & consequenter triplus erit cuiusuis alij in eadem basi, DFEH, & altitudine, cum conico, DBE, existentis, quoniam, vt ostensum est, conici in eadem altitudine stantes sunt, vt bases, vnde cum bases sunt æquales, & conici sunt æquales, verum ergo est, quod proponebatur. 34. huius. Per B. Corollar. 27. huius.

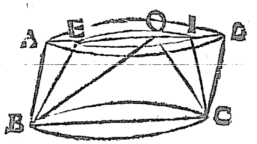


K. SECTIO X.

IN Prop. 27. habemus solida ad inuicem similaria genita ex trapezijs in eadem basi (quæ sit vnum laterum æquidistantium) & altitudine constitutis, quorum oppositæ bases sint æquales, genita, inquam, iuxta communem regulam ipsam basim, idest frusta conicorum quorum oppositæ bases sunt figuræ descriptæ à lateribus dictorum trapeziorum æquidistantibus, esse æqualia.

L. SECTIO XI.

IN Prop. 28. habetur cylindricum in eadem basi, & altitudine cum frusto conici constitutum, ad idem, esse (sumptis duabus homologis in oppositis frusti conici basibus) vt quadratum maioris dictarum homologarum ad rectangulum sub dictis homologis vna cum, $\frac{1}{3}$, quadrati differentiæ earundem homologarum. Sit cylindricus, A C, in basi figura quacumque plana, B C, in eadem autem basi, & altitudine sit frustum conici, E B C I, sic tamen se habens, vt ducto plano per latera cylindrici, A C, idem transeat per latera frusti conici B E I C, sit autem dictum tale planum, quod faciat in cylindrico, A C, parallelogrammum, A C, & in frusto, B E I C, trapezium, B E I C, erunt igitur rectæ, B C, E I, lineæ
Corol. 21. lib. 1. oppositarum basium frusti inter se homologæ,
& quia cylindricus, A C, est solidum simi-
Coroll. 3. lare genitum ex, A C, iuxta regulam, B C,
34. huius. & frustum, E B C I, est solidum prædicto similare genitum ex trapezio,
35. huius.
27. huius. E B C I, sunt autem hæc solida similaria, vt omnia eorumdem quadrata, & omnia quadrata, A C, regula, B C, ad omnia quadrata trapezij, E B C I, regula eadem sunt, vt quadratum, B C, ad rectangulum sub, B C, E I, vna cum, $\frac{1}{3}$, quadrati differentiæ earumdem, ergo cylindricus, A C, ad frustum conicum, E B C I, & ad quoduis aliud in eadem basi, & al-
K. Huius. Coroll. Gener. titudine cum hoc constitutum (quoniam existet huic æquale) erit vt quadratum, B C, ad rectangulum sub, B C, E I, vna cum, $\frac{1}{3}$, quadrati differentiæ earumdem, B C, E I, quæ sunt duarum oppositarum basium, E
Corol. 21. lib. 1. I, B C, homologæ vtcumque sumptæ, nam planum eadem solida secans ductum est vtcumque, dummodo per eorumdem latera transeat.



M. SECTIO XII.

HInc patet si in eadem basi, B C, figura, fuerit conicus, & eadem altitudine cum frusto, idest cum cylindrico, A C, qui sit conicus,
I. Huius. Corollar. Gener. B O C, quod hic erit, $\frac{1}{3}$, cylindrici, A C, & ideò ad frustum, E B C I, erit vt, $\frac{1}{3}$, quadrati, B C, ad rectangulum sub, B C, E I, vna cum, $\frac{1}{3}$, quadrati differentiæ, B C, E I, idest vt totum quadratum, B C, ad rectangulum sub, B C, & tripla, E I, vna cum toto quadrato differentiæ earumdem, B C, E I. Vide igitur quam sit amplior hæc demonstratio ea, qua alij ostenderunt cylindrum esse triplum coni, & prisma piramidis in eadem basi, & altitudine cum ipso constitutæ, nam ad tot varia solida hæc se ex-

se extendit, quot sunt figurarum planarum variationes, quæ nullo assignato coarctantur numero, cuius modi demonstrationis vniuersalitatem in alijs figuris quoque in posterum considerandis prosequemur, vt amplius infra patebit.

N. SECTIO XIII.

IN Prop. 29. & eius Corollario tandem edocemur solida similaria genita ex parallelogrammo, vel triangulo eodem, iuxta duas regulas latera angulum continentia, idest cylindricos ab eodem parallelogrammo, & conicos ab eodem triangulo genitos, iuxta dictas regulas, esse inter se, vt easdem regulas.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXV.

PArallelepipedum sub basi rectangulo quodam, altitudine autem quadam recta linea æquatur parallelepipedis sub basi eodem rectangulo, & sub quotcumq; partibus, in quas altitudo vtcumq; diuidi potest. Et si rectangulum, quod est basis, intelligatur vtcumq; diuisum in quotcumq; rectangula, dictum parallelepipedum æquatur parallelepipedis sub singulis partibus altitudinis, & singulis partibus basis.

Sit parallelepipedum rectangulum, A P, cuius basis rectangulum, T H, supponatur pro nunc indiuisa, & altitudo, D T, diuisa vtcumque in quotcumq; partes, D S, S T. Dico parallelepipedum, A P, æquari parallelepipedis sub, D S, T H, & sub, S T, T H. Ducatur per, S, planum æquidistans basi, T H, quod in eo producet re- Corol. 12. lib. 1.
ctangulum, vt, S G, sunt igitur, A M, N P, parallelepipeda, & , A M, est sub, D S, S G, vel, T H, (quia, S G, T H, sunt figuræ si- Corol. 12. lib. 1.
miles, & æquales) N P, vero sub, S T, T H, continetur, est autem parallelepipedum, A P, contentum sub, D T, T H, æquale parallelepipedis, A M, N P, suis partibus simul sumptis, ergo parallelepipedum sub, D T, T H, æquatur parallelepipedis sub, D S, T H, & sub, S T, T H.

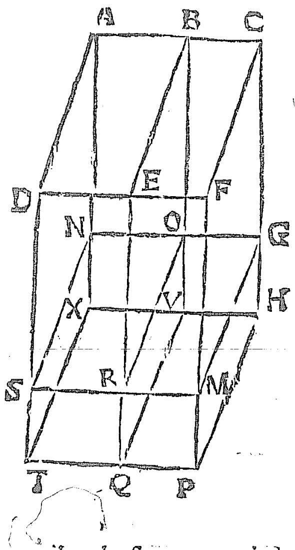
Sit nunc basis, T H, diuisa vtcumque in quotcumque rectangula, T V, V P. Dico parallelepipedum sub, D T, T H, æquari parallelepipedis sub, D S, T V, sub, D S, V P, sub, S T, T V, & sub, S T, V P. Ducatur per rectam, Q V, planum æquidistans planis,

 D X,

DX, FH, quod producat in parallelepipedo, A P, rectangulum, E

Coroll.6. lib.1. V, in parallelepipedo, A M, rectangulum, E O, & in parallelepipedo, N P, rectangulum, R V, per pla-

10. Lib.1. num igitur, E V, diuiduntur parallelepipeda, A M, N P, in parallelepipeda, A R, B M, N Q, O P, eſt autem totum parallelepipedum, A P, æquale parallelepipedis, A R, B M, N Q, O P, & eſt parallelepipedum, A R, ſub, D S, S O, ideſt ſub, D S, T V, & parallelepipedum, B M, ſub, E R, R G, hoc eſt ſub, D S, Q H, & parallelepipedum, N Q, eſt ſub, S T, T V, &, O P, eſt ſub, R Q, Q H, hoc eſt ſub, S T, Q H, ergo parallelepipedum, A P, ideſt ſub, D T, T H, eſt æquale parallelepipedis ſub, D S, &, T V, & ſub, D S, V P, & ſub, S T, T V, & ſub, S T, Q H, ideſt parallelepipedis ſub ſingulis partibus altitudinis, & ſingulis partibus baſis contentis.



SCHOLIVM.

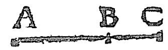
Contineri autem parallelepipedum voco ſub tribus rectis eiuſdem angulum ſolidum continentibus, quarum dua qualibet rectum angulum conſtituunt, ſiue ſub earum quauis, & parallelogrammo rectangulo ſub reliquis duabus; ita vt, cum dico parallelepipedum ſub tali recta linea, & tali rectangulo, ſiue ſub talibus tribus rectis lineis, intelligam illud parallelepipedum habere angulum ſolidum rectis angulis conſtitutum, veluti in iſtis Theorematibus ipſum aſſumo, igitur patet nos ex tribus rectis parallelepipedum continentibus quamlibet poſſe pro altitudine ſumere, & rectangulum ſub reliquis duabus pro baſi.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXVI.

SI recta linea in vno puncto ſecta ſit vtcumq; parallelepipedum ſub tota linea, & quadrato vnius factarum partium erit æquale parallelepipedo ſub tali parte, & rectangulo

totius in talem partem ductæ. Idem autem parallelepipedum ſub tota, & talis partis quadrato, erit æquale parallelepipedo ſub reliqua, & quadrato talis partis, vna cum cubo eiuſdem partis.

Sit ergo recta linea, A C, vtcumque ſecta in, B, dico parallelepipedum ſub, A C, & quadrato, C B, æquari parallelepipedo ſub, B C, & rectangulo, B C A, hoc autem patet ex ſuperiori Scholio, nam parallelepipedum ſub, A C, & quadrato, C B, continetur ſub tribus his rectis lineis, nempè, A C, & duabus, C B, & ideò idem continetur ſub, C B, & rectangulo, A C B, ſiue eſt æquale contento ſub, B C, & rectangulo, A C B.



Dico inſuper parallelepipedum ſub, A C, & quadrato, C B, æquari parallelepipedo ſub, A B, & quadrato, C B, vna cum cubo, C B, quod patet nam parallelepipedum ſub diuiſa altitudine, A C, & Ex antec. indiuiſa baſi, nempè quadrato, C B, æquatur parallelepipedis ſub partibus ſingulis, & baſi, ſcilicet ſub, A B, & quadrato, B C, & ſub, B C, & quadrato, B C, ideſt cubo, B C, quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XXXVII.

SI recta linea in vno puncto ſecta ſit vtcumq; cubus totius æquabitur parallelepipedis ſub partibus, & quadrato eiuſdem. Idem etiam erit æquale parallelepipedis ſub tota, & partibus quadrati totius per talem diuiſionem factis, ideſt parallelepipedis ſub tota, & quadratis partium, & rectangulo ſub partibus bis contento.

Sit recta linea, A C, vtcumq; ſecta in, B, dico cubum, A C, æquari parallelepipedis ſub partibus, A B, B C, & quadrato totius, quod patet nam cubus, A C, ideſt parallelepipedum ſub diuiſa, A C, & 35. huius. indiuiſa baſi quadrato, A C, eſt æquale parallelepipedis ſub partibus, A B, B C, eiuſdem, A C, diuiſæ, & ſub eadem baſi quadrato, A C.

Dico etiam cubum, A C, æquari parallelepipedis ſub, A C, & quadrato, A B, quadrato, B C, & rectangulo bis ſub, A B C, nam cubus, A C, ideſt parallelepipedum ſub indiuiſa altitudine, A C, & 35. huius. diuiſa baſi in dicta quattuor ſpatia, æquatur parallelepipedis ſub eadem indiuiſa altitudine, A C, & ſub dictis baſis partibus, nempè ſub quadrato, A B, quadrato, B C, & rectangulo bis ſub, A B C, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc patet cubum totius, A C, æquari parallelepipedis sub singulis partibus ipsius, A C, & singulis partibus quadrati, A C, quod etiam patet ex Theoremate 35.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XXXVIII.

SI recta linea in vno puncto secta sit vtcumq; cubus totius æquatur cubis partium, vna cum parallelepipedis ter sub qualibet partium, & quadrato reliquæ. Vel æquatur cubis partium vna cum tribus parallelepipedis, sub tota, & eiusdem partibus contentis.

Sit recta linea, A C, vtcumque secta in puncto, B. Dico cubum, A C, æquari cubis, A B, B C, & parallelepipedis ter sub, A B, & quadrato, B C, & ter sub, B C, & quadrato, A B. Nam parallele-
Ex Corol. ant. vel ex 35. huius. pipedum sub, A C, & quadrato, A C, (qui est cubus, A C,) æquatur parallelepipedis sub singulis partibus ipsius, A C, & sub singulis partibus quadrati, A C, ab hac diuisione prouenientibus, idest parallelepipedo sub, A B, & quadrato, A B, qui est cubus, A B, item sub, A B, & quadrato, B C, item sub, A B, & rectangulo, A B C, bis,
36. huius. Pars 1. idest sub, C B, & quadrato, B A, bis sumpto, habemus ergo vnum cubum, A B, vnum parallelepipedum sub, A B, & quadrato, B C, & duo sub, B C, & quadrato, B A; transeamus nunc ad aliam partem, B C, remanent ergo parallelepipeda sub, B C, & quadrato, B C, idest vnus cubus, B C, item sub, C B, & quadrato, A B, & tandem sub, C B, & rectangulo, C B A, bis,
36. huius. Pars 1. idest sub, A B, & quadrato, B C, bis, si igitur hæc posteriora parallelepipeda prioribus iunxeris habebis cubum, A B, cubum, B C, parallelepipedum ter sub, A B, & quadrato, B C, & ter sub, B C, & quadrato, B A, quibus æquale erit parallelepipedum sub, C A, & quadrato, C A, idest cubus, C A. Quia verò parallelepipedum sub, C B, & quadrato, B A, idest sub, A B, & rectangulo, A B C, cum parallelepipedo sub, A B, & quadrato, B C, idest sub, C B, & rectangulo, A B C, æquatur, ex 35. huius, parallelepipedo sub tota, A C, & rectangulo sub partibus, A B, B C, ideò dicta sex parallelepipeda tribus sub tota, A C, & partibus eiusdem, A B, B C, æqualia erunt, quod demonstrare propositum fuit.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVoniam posterior pars Propos. antec. addita fuit post impressionem Lib. 3. 4. & 5. ideò ne mireris, benigne Lector, si in eisdem aliquando Propositiones offenderis nonnihil prolixiores, quam si per hanc posteriorem partem fuissent demonstratæ, cum illa ex priori parte tunc deductæ fuerint, quod solerti Geometræ haud difficile erit in illis propositionibus animaduertere, in quibus hanc viderit adhiberi.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XXXIX.

SI recta linea bifariam, & non bifariam secta fuerit, parallelepipedum sub medietate propositæ lineæ, & sub rectangulo inæqualibus partibus contento, cum parallelepipedo sub eadem medietate, & sub quadrato sectionibus intermediæ, æquabitur cubo eiusdem medietatis propositæ lineæ.

Sit recta linea, A E, bifariam diuisa in, B, non bifariam in C. Dico parallelepipedum sub, B E, & rectangulo, A C E, vna cum parallelepipedo sub, B E, & sub quadrato, B C, cubo eiusdem, B E, æquale esse; Nam rectangulum, A C E, cum quadrato, B C, quadrato, B E, est æquale, vt autem rectangulum, A C E, cum qua- 5. Secūdi Elem.
drato, B C, ad quadratum, B E, ita (sumpta communi altitudine, 5. huius.
B E,) parallelepipedum sub, B E, & rectangulo, A C E, & sub, B E, & quadrato, B C, ad parallelepipedum sub, B E, & quadrato, B E, idest ad cubum, B E, ergo parallelepipedum sub, E B, & sub rectangulo, A C E, vna cum parallelepipedo sub eadem, E B, & sub quadrato, B C, erit æquale cubo, E B, quod ostendendum erat.

THEO-

THEOREMA XL. PROPOS. XL.

SI recta linea bifariam secta fuerit, & illi in directum adiuncta quæuis recta linea; parallelepipedum sub composita ex dimidia propositæ, & ex adiuncta linea, & sub rectangulo sub composita ex tota, & adiuncta, & sub adiuncta, vna cum parallelepipedo sub composito ex eadem propositæ medietate, & ex adiuncta, & sub quadrato eiusdem medietatis, æquabitur cubo compositæ ex dicta medietate, & adiuncta.

Sit recta linea proposita, A C, bifariam in, B, diuisa, cui in directum sit adiuncta vtcumq; C E. Dico parallelepipedum sub, B E, & rectangulo, A E C, vna cum parallelepipedo sub, B E, & quadrato, B C, æquari cubo ipsius, B E. Nam rectangulum, A E C, cum
6. Secũdi Elem. quadrato, C B, æquatur quadrato, B E, igitur (sumpta communi altitudine, B E,) parallelepipedum sub, B E, & rectangulo, A E C, vna cum parallelepipedo sub, B E, & quadrato, B C, æquabitur pa-
5. huius. rallelepipedo sub, B E, & quadrato, B E, idest cubo, B E, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

EX methodo in superioribus demonstrationibus adhibita manifestum est nos similiter ceteras Propositiones secundi Elementorum demonstrare posse, in quibus linea secta in vno, vel pluribus punctis consideratur, ad parallelepipeda eadem traducentes, nam si super spatia in illis considerata intelligantur constitui æquè alta parallelepipeda, erunt illa, vt ipsæ bases, propterea quę ibi de basibus demonstrantur, de parallelepipedis æquè altis eisdem basibus insistentibus rectè colligi possunt, quæ ob claritatem, & facilitatem à me relinquuntur.

THEOREMA XLI. PROPOS. XLI.

PArallelepipedum, quod sub tribus rectis lineis proportionalibus continetur, æquale est cubo mediæ.

Hæc

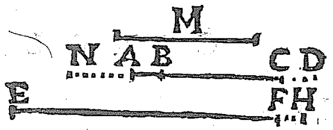
Hæc manifesta est, nam habebunt bases ipsis altitudinibus reciprocas, quod etiam vniuersalius ostenditur Vndecimo Elementorum Propos. 36.

THEOREMA XLII. PROPOS. XLII.

DAta recta linea terminata, vtcumque in puncto diuisa, possibile est ipsam ad alteram eiusdem partium ita producere, vt cubus compositæ ex proposita linea, & adiuncta, sit æqualis cubo propositæ lineæ, simul cum cubo compositæ ex adiecta, & illi conterminante portione sectæ lineę.

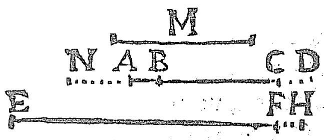
Sit data recta linea, A C, terminata, diuisaq; vtcumque in puncto, B, ostendendum est possibile esse ipsam ita producere ad alteram illius partium, vt ad, C, vt cubus compositę ex, A C, & adiecta, sit æqualis cubo, A C, cum cubo compositæ ex eadem adiecta, & ex, B C, portione, A C, adiectæ conterminante. Producatur ergo, C A, ad partes, A, vt in, N, ita quod, N B, sit tripla, B A, fiat deinde, vt, N B, ad, B C, ita quadratum, B C, ad quadratum rectæ lineę, M, seorsim positæ: Vlterius exponatur recta, E F, æqualis compositæ ex, A C, C B, cui applicetur rectangulum æquale quadrato, M, excedens figura quadrata, cuius latus sit, F H, producatur autem, A C, versus, C, vt in, D, ita nempe, vt, C D, sit æqualis, F H. Dico cubum totius, A D, æquari duobus cubis, A C, B D. Cum .n. sit, vt, N B, ad, B C, ita quadratum, B C, ad quadratum, M, ideò parallelepipedum sub altitudine, A B, (quę est, $\frac{1}{3}$, prædictę altitudinis, N B,) & quadrato, M, æquabitur tertiæ parti cubi, B C. Quoniam verò quadratum, M, æquatur rectangulo, E H F, idest rectangulo sub composita ex, A D, B C, & sub, C D, ideò parallelepipedum sub altitudine, A B, & basi rectangulo sub composita ex, A D, B C, & sub, D C, æquabitur tertiæ parti cubi, B C, addatur commune parallelepipedum sub, B C, & basi rectangulo, B D C, erit ex vna parte hoc parallelepipedum cum, $\frac{1}{3}$, cubi, B C, ex alia verò hæc summa; scilicet parallelepipedum sub, A B, & sub rectangulo sub composita ex, A D, B C, & sub, D C, vna cum parallelepipedo sub, B C, & rectangulo, B D C, quæ quidem summa efficit parallelepipedum sub, A C, & rectangulo, A D C, iam .n. ha-

19. Sexti Elem.



E. Cor. 4. Gen. 34. huius.

n. habemus parallelepipedum ſub, A B, & rectangulo, A D C, & ſub, A B, & rectangulo, B C D, i. ſub, B C, & rectangulo ſub, A B, C D, cui ſi iunxeris parallelepipedum ſub, B C, & rectangulo ſub, B D, D C, componetur parallelepipedum ſub, B C, & rectangulo, A D C, quod additum parallelepipedo ſub, A B, & eodem re-



35. huius. ctangulo, A D C, componet parallelepipedum ſub, A C, & rectangulo, A D C, quod quidem æquale erit alteri ſummæ prædictæ, nempè parallelepipedo ſub, B C, & rectangulo ſub, B D, D C, vna cum, $\frac{1}{3}$, cubi, B C, ergo & eorum tripla æqualia erunt ſci-
Schol. 35. huius. licet parallelepipedum ter ſub, A C, & rectangulo, A D C, ſeu ter ſub, A D, & rectangulo, A C D, æquabitur parallelepipedo ter ſub, B C, & rectangulo, B D C, ſeu ter ſub, B D, & rectangulo, B C D, cum cubo, B C, additis verò communibus cubis, A C, C D, fiet pa-
38. huius. rallelepipedum ter ſub, A D, & rectangulo, A C D, cum cubis, A C, C D, ideſt totus cubus, A D, æqualis parallelepipedo ter ſub, B
38. huius. D, & rectangulo, B C D, cum cubis, B C, C D, (quæ integrant cubum, B D,) & cum cubo, A C, eſt igitur cubus, A D, æqualis duobus cubis, A C, B D. Poſſibile eſt ergo facere, quod propoſitum fuit.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi, A C, ſit latus dati cubi, & ſit etiam data recta linea, vt, A B, minor, A C, poſſibile eſſe inuenire duos cubos, vt, A D, D B, ita vt eorum differentia ſit æqualis cubo dato, A C, & laterum cubicorum, A D, D B, ſcilicet, A B, pariter differentia ſit data, eſt.n. cubus, A C, æqualis dictæ cuborum, A D, D B, differentiæ, vt oſtenſum eſt. Cum verò ſimilia ſolida quæcunq; ſint in tripla ratione linearum, ſeu laterum homologorum eorumdem, ideò erunt, vt cubi ipſarum linearum, ſeu laterum homologorum, & ideò eandem rationem, quam habet cubus, A D, ad cubum, D B, habebit ex. gr. Icoſaedrum deſcriptum latere, A D, ad Icoſaedrum deſcriptum latere, B D, prædicto homologo, & vt cubus, A D, ad cubum, A C, ita erit Icoſaedrum, A D, ad Icoſaedrum, A C, nec non colligendo, vt cubus, A D, ad cubos, A C, B D, ita erit Icoſaedrum, A D, ad Icoſaedra, A C, B D, ergo Icoſaedrum, A D, æquabitur Icoſaedris, A C, B D, & ſuperabit Icoſaedrum, B D, Icoſaedro, A C, ergo ſi datum fuiſſet Icoſaedrum, A C, & , A B, recta linea ipſius latere minor, non diſſimiliter, ac in cubis inuenta eſſent Icoſaedra, A D, D B, quorum differentia eſſet æqualis dato Icoſaedro, A C, nec non eorumdem laterum homologorum differentia æqualis datæ rectæ lineæ, A B. Sic etiam datæ Sphæræ Orbem datæ craſſitici, minoris tamen illius ſemidiametro, æqualem poſſibile erit inuenire. Vniuerſaliſſimè autem dato quocumq. ſolido, duorum ipſi dato ſimilium differentiam æqualem poſſibile erit inuenire, quorum pariter linearum, ſeu laterum homologorum differentia ſit data, dummodo ea ſit minor linea, ſeu latere propoſiti ſolidi prædictis homologo, quod ex ſuperius dictis facilè conſtare poteſt.

SCHOLIVM.

Nonnulla autem ex præfatis proximis Propoſitionibus etiam ab alijs oſtenſæ fuerunt, ſed ne Lectori ad alios Libros pro harum captu eſſet recurrendum, hic eas adiungere placuit, præcipuè cum earum adductæ demonſtrationes ab aliorum Auctorum rationibus, ni fallor, non parum ſint differentes, cum ferè omnes ex vnica Propoſ. 35. via ſatis compendioſa deductæ ſint; quod olim me circa Propoſitiones Secundi Elem. à prima nempè vſq; ad 10. præſtitiſſe memini, eas omnes ex prima compendioſiſſimè demonſtrando, vt etiam poſtmodum, & Patrem Clauium feciſſe animaduerti.

Finis Secundi Libri.